

分类号 TN967.1

密 级

U D C

编 号 10486

武汉大学

博 士 学 位 论 文

基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何  
状态精密测量技术研究

研 究 生 姓 名 : 陈起金

指导教师姓名、职称 : 牛小骥 教授

学 科 、 专 业 名 称 : 大地测量学与测量工程

研 究 方 向 : GNSS/INS 组合导航

二〇一六年九月

**Research on the Railway Track Geometry  
Surveying Technology Based on  
Aided INS**

**By**

**Qijin Chen**

**Supervised By**

**Prof. Xiaoji Niu**

**Wuhan University**

**September 2016**

## 论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

年 月 日

## 武汉大学学位论文使用授权协议书

(一式两份, 一份论文作者保存, 一份留学校存档)

本学位论文作者愿意遵守武汉大学关于保存、使用学位论文的管理办法及规定, 即: 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版, 并提供文献检索与阅览服务; 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文; 在以教学与科研服务为目的前提下, 学校可以在校园网内公布部分或全部内容。

一、在本论文提交当年, 同意在校园网内以及中国高等教育文献保障系统(CALIS)、高校学位论文系统提供查询及前十六页浏览服务。

二、在本论文提交  当年 /  一年 /  两年 /  三年以后, 同意在校园网内允许读者在线浏览并下载全文, 学校可以为存在馆际合作关系的兄弟高校用户提供文献传递服务和交换服务。(保密论文解密后遵守此规定)

论文作者(签名): \_\_\_\_\_

学 号: \_\_\_\_\_

学 院: \_\_\_\_\_

日期:            年    月    日

# 博士生自认为的论文创新点

本文研究了基于带有辅助信息的惯性导航系统(Aided Inertial Navigation System, 简称 A-INS)的铁路轨道几何状态精密测量技术,建立了相关理论方法,并在此基础上解决了关键实践问题。主要创新点如下:

1) 提出了一种基于 A-INS 组合导航技术的高铁轨道几何状态精密测量方法。该方法利用惯性导航(简称惯导)灵敏的运动感知能力,将其搭载在轨检小车上,通过感知轨道不平顺引起的轨检小车运动状态变化来反演轨道的几何形状,从而实现对铁路轨道几何状态参数的动态、精密测量。该方法在本质上充分发挥了惯导出色的相对测量能力,在辅助信息的宏观修正下,在轨道平顺性检测所关心的局部里程区间内达到了亚毫米/毫米级的相对测量精度,满足了高铁轨检的苛刻要求。该方法改变了传统测量方法“走走停停”的作业模式,在保障精度的前提下实现了“边走边测”的动态测量,从而显著提高了测量效率。

2) 针对铁路轨道测量应用场景建立了一套全新的考虑输出误差时间相关性的 A-INS 测量误差传播模型。不同于传统的将导航定位误差当作孤立的随机变量的误差分析方法,本文将 A-INS 组合导航系统的测量误差当作随机过程来研究,在获取误差幅度信息的同时还获得了其时间相关性;建立了误差源与最终测量误差之间的传递关系,并提供了相应的误差定量分析方法。基于该误差模型和误差分析方法,首次从理论上论证了 A-INS 轨检小车实现高精度轨道不平顺测量的可行性,并分析和评估了不同精度等级的 A-INS 组合导航系统所对应的轨道几何状态测量精度,以及影响测量精度的几个关键因素。为 A-INS 轨检小车的设计和实现提供了全面系统和定量的理论指导。

3) 设计并优化了 A-INS 轨检小车原型系统,通过实际轨道测量实验来全面而系统地评估了其整体性能。首次实现了动态测量模式下的高铁轨道不平顺亚毫米级测量精度;测量效率相比于现有传统手段提高 15-20 倍;该方案对轨道 CPIII 控制网的依赖程度低,不受气温、光照等环境因素影响;操作简单方便,对操作人员没有专业素质方面的要求。A-INS 轨检小车原型系统已在多次轨道测量评估实验和多个实际工程项目中得到了全面而充分的验证。

## 摘要

我国大规模高速铁路建设带来了对轨道几何状态精密测量的迫切需求,而现有的光学或其它测量手段难以兼顾测量精度和效率,因此亟需一种全新的快速精密测量方法。本文提出了基于带有辅助信息的惯性导航系统(A-INS)的轨道几何状态精密测量方法,利用惯导出色的运动感知能力和短期精度,在辅助信息的宏观修正下,在轨道局部里程区间内实现了亚毫米/毫米量级的相对测量精度,满足了轨道精密测量的苛刻需求,并显著提高了测量效率,为轨道几何状态的快速精密测量提供了一种新方法。作为该方法的理论支撑,建立了 A-INS 组合导航系统的误差传播模型,提供了一套分析 A-INS 轨道几何状态测量仪“仪器精度”的理论方法。主要研究工作包括以下几个方面:

1. 针对铁路轨道测量应用场景建立了 A-INS 测量误差传播模型。传统的导航系统误差研究只关注误差幅度,而本文针对轨道几何状态精密测量的对空间相对精度的需求,兼顾了误差序列的时间相关性,为此将 A-INS 组合导航看作一个由噪声激励的随机系统,将其导航误差作为随机过程来研究。当 A-INS 组合导航的连续时间卡尔曼滤波达到稳态时,系统简化成了由观测白噪声和驱动白噪声激励的线性时不变系统。研究该系统的传递函数,得到了各误差源与输出测量误差之间的传递关系,也即 A-INS 测量误差传播模型。基于该模型分析了导航误差的时间相关性和时间/空间相对精度。

2. 基于建立的 A-INS 测量误差传播模型研究了铁路轨道测量误差的随机过程特性,首次实现了对 A-INS 轨道几何参数测量误差的定量分析,论证了高精度 A-INS 组合导航系统实现亚毫米级相对测量精度的可行性,正面回答了“在厘米级的 GNSS 位置修正下惯导为什么能实现亚毫米级测量精度”的质疑。在此基础上,进一步指出了轨道对惯导运动状态的非完整性约束(NHC)对于提高 A-INS 相对测量精度的关键性作用;数据仿真结果为理论分析提供了有力的佐证;深入分析了惯导各主要误差源对轨道几何参数测量精度的定量影响,指出了影响测量精度的主要误差项,为系统设计过程中的器件选型提供了理论依据;最后讨论了运动速度和 GNSS 位置辅助信息更新率对测量精度的影响。上述理论分析成果为实际系统的结构设计和参数优化提供了理论指导。

3. 设计优化了一套 A-INS 轨检小车原型系统,并自主开发了全套数据处理软件,作为本文研究工作的实测试验平台。重点讨论了 A-INS 轨检小车硬件设计与实现的原则和关键技术细节,包括小车车体设计、传感器选型及多源数据的时间同步策略;设计实现了 A-INS 轨检小车测量数据处理算法,重点讨论了实现亚毫米级相对测量精度的关键技术细节,包括如何合理和充分地使用非完整性约束更新。

4. 通过大量的轨道实测数据全面而系统地评估了 A-INS 轨检小车的整体性能,并对本文建立的误差传播模型和定量分析方法进行了验证。1) 通过与现有高精度测量手段进行对比,检验了 A-INS 轨检小车的轨道偏差量以及轨道轨向、高低不平顺、水平、

轨距等参数的外符合精度。2) 对比同一段轨道的多次独立测量结果, 分析了 A-INS 轨检小车的内符合精度。轨道不平顺的实测精度与理论分析一致, 验证了误差传播模型和定量分析的正确性和有效性; 实测结果进一步验证了非完整性约束对测量精度的贡献。3) 考察了 A-INS 轨检小车在曲线轨道上的测量性能, 指出 A-INS 轨检小车在不同轨道线型上的测量精度并无明显差异。

综上, 本文研究工作的贡献可归结为: 提出并解决了 A-INS 组合导航技术用于铁路轨道几何状态精密测量的核心理论和实践问题, 提供了一种高效率、高精度且易于操作的轨道几何状态的动态精密测量方案。本文研究成果为方兴未艾的惯性精密测量技术 (Inertial Surveying) 提供了理论方法和工程实践上的参考案例。

关键词: A-INS 轨检小车, 轨道几何状态测量, 轨道不平顺, 误差传播模型, 惯性精密测量

## Abstract

The large-scale high-speed railway construction in China brings vast and urgent demands of accurate surveying of the railway track geometry. The existing optical and other surveying methods cannot meet the accuracy and efficiency requirement at the same time, thus finding a fast and accurate surveying method is the only way to solve this problem. The theory and method of railway track survey based on aided inertial navigation system (A-INS) is studied in this thesis, which provides a new solution for rapid and accurate measurement of the railway track geometry.

Track geometry measurement is a problem of determining the position and attitude of the rails, focusing on measuring the geometric shape of the track, and is relative measurement in essence. The A-INS has excellent continuous relative measurement capability, and the track geometrical parameters can be measured by A-INS in a non-contact manner through moving on the track. Firstly, the error propagation model of the aided inertial navigation system is established, which provides a theoretical method to analyze the accuracy of the A-INS track measuring trolley.

1. A complete error propagation model of the aided inertial navigation system is established for the application of railway track surveying. The A-INS is considered as a stochastic system driven by noise and whose output is also treated as stochastic process. The continuous-time error state Kalman filter of the aided inertial navigation system can be reduced to a linear time-invariant system driven by white noise when reaching steady state performance. Taking Laplace transform of the continuous-time error state Kalman filter functions yields the transfer function of the aided inertial navigation system based on which the relation from the error sources and the surveying error is determined and the time- and spatial- relative accuracy can be studied.

2. The stochastic characteristics of the A-INS is studied and measurement accuracy of the track geometrical parameters is quantitatively analyzed based on the established error propagation model of the A-INS. It is proved theoretically that sub-millimeter relative measurement accuracy is achieved by the navigation grade INS with auxiliary information and meets the accuracy demand of the high-speed railway track surveying. The non-holonomic constraint of the track on the A-INS track trolley motion is proved to be a key point for improving the relative measurement accuracy of the A-INS and the simulation results provides a strong proof for this theoretical analysis. The effect of the main A-INS error sources on the railway track geometric parameters measurement accuracy is quantitatively analyzed, which provides a reference for the sensor choice in the A-INS track trolley design. The influence of the moving speed of the trolley and GNSS position update rate on the surveying accuracy is discussed, which is a practical consideration for the real system.

The quantitative analysis of the measurement error validates the feasibility of using the A-INS technique to survey railway track geometric parameters of the high-speed line. The second part of the paper focuses on the design and implementation of the railway track geometry surveying system based on A-INS, namely A-INS track trolley, including the hardware design and algorithm development.



3. The hardware and software development of the A-INS track trolley are introduced. Key points of hardware design that affecting the A-INS track trolley performance and details on the preprocess of the sensor data are discussed with emphasis. Time synchronization scheme of different sensors and level-arms accurate measurement principle and method are described in detail since data synchronization is the premise of multi-sensor integrated system. The data processing algorithm for the A-INS track surveying trolley is developed. Firstly, The Kalman filter for the aided navigation system is designed, and several practical methods for INS initialization are proposed. Theoretical analysis of A-INS error points out the importance of non-holonomic constraint, thus in the algorithm design, the method and skill of how to use non-holonomic constraint are given. Finally, the method of how to calculate the railway track deviation or deformation and estimate the track geometric state based on the A-INS position measurement is introduced.

4. The performance of the A-INS track surveying trolley is comprehensively evaluated and several key points of the theoretical analysis of measurement error are verified through actual railway track surveying experiment. 1) The internal accord accuracy of the A-INS track surveying trolley is evaluated by comparing the results of multiple independent surveys on the same track section. On the other hand, the external accord accuracy of the track parameters measurement, such as deformation amplitude, track irregularity of both short and long wavelength, cant and gauge, is evaluated by comparing with the existing high accuracy measuring method. 2) The effect of the non-holonomic constraint update on the measurement accuracy of the A-INS track surveying trolley is discussed through actual experiments and is in agreement with the theoretical analysis. 3) The surveying performance of the A-INS track surveying trolley on the curved track section is evaluated and shows that the measurement accuracy is the same on different types of track section. 4) We discuss the effect of optimal smoothing processing, the results show that optimal smoothing process cannot improve the relative measurement accuracy of A-INS track surveying trolley when operated with reasonable use of non-holonomic constraint update.

In summary, this paper focuses on the theoretical and practical engineering problem of using aided inertial navigation system to the railway track geometry surveying, and attempts to provide the theoretical reference and engineering practice guidance for the forthcoming inertial precise surveying.

**Keywords: A-INS track survey trolley, railway track irregularity, railway track geometry survey, error propagation model, precise inertial surveying.**

# 目 录

摘 要 .....	I
Abstract.....	III
图 目 录 .....	VIII
表 目 录 .....	X
缩略词 .....	XI
<b>1 绪论 1</b>	
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 相关技术及研究现状.....	2
1.2.1 轨道动态综合检测技术.....	2
1.2.2 轻型轨检小车技术.....	7
1.2.3 A-INS 组合导航误差传播相关研究.....	13
1.3 论文的研究目标.....	15
1.4 论文的研究内容与结构安排.....	15
<b>2 基于 A-INS 的铁路轨道几何状态测量技术 .....</b>	<b>17</b>
2.1 引言.....	17
2.2 铁路轨道几何状态.....	17
2.2.1 轨道几何参数.....	17
2.2.2 轨道不平顺评估指标.....	19
2.3 A-INS 轨道几何状态测量基本原理 .....	20
2.3.1 轨道几何状态测量的本质 .....	20
2.3.2 A-INS 轨检小车测量原理.....	20
2.3.3 A-INS 轨检小车的测量误差.....	22
2.4 惯性导航技术基础.....	24
2.4.1 常用坐标系及转换 .....	24
2.4.2 姿态表达式及转换 .....	29
2.4.3 惯性传感器误差 .....	31
2.4.4 捷联惯性导航机械编排 .....	31
2.4.5 惯性导航误差方程 .....	35
2.5 组合导航技术基础.....	38
2.5.1 卡尔曼滤波.....	39
2.5.2 最优平滑算法 .....	41

2.5.3 A-INS 组合导航算法.....	42
2.6 本章小结.....	46
<b>3 A-INS 轨道测量误差传播分析.....</b>	<b>47</b>
3.1 引言.....	47
3.2 A-INS 测量误差传播模型.....	49
3.2.1 误差及变量定义.....	49
3.2.2 惯导误差方程简化.....	51
3.2.3 连续时间卡尔曼滤波.....	53
3.2.4 高程通道误差模型.....	54
3.2.5 水平通道误差模型.....	59
3.3 A-INS 测量误差随机特性分析.....	62
3.3.1 A-INS 测量误差分析方法.....	62
3.3.2 Allan 方差分析.....	65
3.3.3 功率谱密度分析.....	68
3.4 A-INS 轨道测量误差定量分析.....	68
3.4.1 轨道不平顺测量误差分析.....	69
3.4.2 非完整性约束对测量精度的影响.....	71
3.4.3 惯性传感器误差对测量精度的影响.....	73
3.4.4 小车运动速度对测量精度的影响.....	78
3.4.5 A-INS 轨道测量误差定量分析小结.....	80
3.5 本章小结.....	81
<b>4 A-INS 测量误差传播模型仿真验证.....</b>	<b>82</b>
4.1 引言.....	82
4.2 A-INS 数据仿真与处理.....	82
4.2.1 A-INS 松组合数据仿真.....	83
4.2.2 仿真数据处理.....	84
4.3 A-INS 误差传播模型验证.....	85
4.3.1 A-INS 误差随机特性验证.....	85
4.3.2 轨道不平顺测量精度验证.....	86
4.3.3 非完整性约束的影响验证.....	88
4.4 GNSS 更新率对测量精度的影响.....	89
4.5 本章小结.....	90
<b>5 A-INS 轨检小车原型设计与实测试验.....</b>	<b>91</b>
5.1 引言.....	91

5.2 轨检小车硬件系统设计 .....	91
5.2.1 轨检小车车体 .....	92
5.2.2 传感器功能与选型 .....	93
5.2.3 时间同步方案 .....	98
5.3 数据处理算法工程化与软件设计 .....	98
5.3.1 A-INS 松组合算法工程化 .....	100
5.3.2 轨道几何参数的计算 .....	102
5.4 整体性能测试与分析 .....	108
5.4.1 实验描述 .....	108
5.4.2 内符合精度分析 .....	109
5.4.3 外符合精度分析 .....	114
5.5 基于实测验证的延伸讨论 .....	118
5.5.1 非完整性约束的影响 .....	118
5.5.2 曲线轨道测量精度分析 .....	119
5.5.3 最优平滑对精度的影响 .....	120
5.6 工程应用效果 .....	121
5.7 本章小结 .....	123
<b>6 结论与展望 .....</b>	<b>125</b>
6.1 工作总结与创新点 .....	125
6.2 工作展望 .....	127
<b>参考文献 .....</b>	<b>128</b>
<b>攻博期间的科研成果 .....</b>	<b>134</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>136</b>

## 图 目 录

图 1-1 高铁无砟轨道三级平面控制网布设示意图 .....	11
图 1-2 绝对误差与相对误差及其研究方法的差异 .....	14
图 2-1 轨道超高示意图 .....	18
图 2-2 轨道轨向不平顺(变形)示意图 .....	18
图 2-3 轨道高低不平顺(变形)示意图 .....	19
图 2-4 30 m 弦轨道不平顺检测示意图 .....	19
图 2-5 轨道几何变形/不平顺导致轨道的位置坐标和姿态在设计值附近扰动 .....	20
图 2-6 A-INS 高铁轨道几何形状测量系统示意图 .....	22
图 2-7 A-INS 轨检小车误差源 .....	22
图 2-8 地心惯性坐标系与地心地固坐标系 .....	25
图 2-9 车体坐标系的坐标轴 .....	27
图 2-10 $p$ 系与 $n$ 系之间的相对关系 .....	28
图 2-11 Frenet 坐标系 .....	29
图 3-1 随机常数和白噪声过程的样本序列 .....	47
图 3-2 本章的研究内容安排 .....	48
图 3-3 A-INS 测量误差传播模型研究思路 .....	49
图 3-4 高程通道(简化模型)的连续时间卡尔曼滤波框图 .....	56
图 3-5 基于误差传播模型的 A-INS 测量误差定量分析研究思路 .....	62
图 3-6 蒙特卡洛仿真得到的 A-INS 位置误差序列 .....	64
图 3-7 蒙特卡洛仿真得到的 A-INS 姿态角误差序列 .....	65
图 3-8 各类随机误差的 Allan 标准差曲线 .....	66
图 3-9 A-INS 位置误差 Allan 标准差曲线 .....	67
图 3-10 A-INS 位置误差功率谱密度曲线 .....	68
图 3-11 短波轨道不平顺测量误差 .....	70
图 3-12 轨道短波不平顺测量误差统计 .....	70
图 3-13 长波轨道不平顺测量误差 .....	71
图 3-14 轨道长波不平顺测量误差统计 .....	71
图 3-15 无 NHC 辅助下的高程及高低不平顺测量误差 .....	73
图 3-16 无 NHC 更新时轨道高低不平顺测量误差统计 .....	73
图 3-17 轨道不平顺测量误差随陀螺零偏误差的变化关系 .....	75
图 3-18 绝对位置误差和轨道超高测量误差随陀螺零偏误差的变化关系 .....	75
图 3-19 轨道不平顺测量误差随加速度计零偏误差的变化关系 .....	76
图 3-20 绝对位置误差和轨道超高测量误差随加速度计零偏误差的变化关系 .....	76
图 3-21 轨道不平顺测量误差随 ARW 的变化关系 .....	77
图 3-22 绝对位置误差和轨道超高测量误差随 ARW 的变化关系 .....	77
图 3-23 轨道不平顺测量误差随 VRW 的变化关系 .....	78
图 3-24 绝对位置误差和轨道超高测量误差随 VRW 的变化关系 .....	78
图 3-25 轨道不平顺测量误差与运动速度的关系 .....	80
图 3-26 绝对位置误差和轨道超高测量误差与运动速度的关系 .....	80
图 4-1 A-INS 误差传播模型仿真验证思路 .....	82

图 4-2 GNSS/INS 松组合数据仿真流程.....	83
图 4-3 A-INS 仿真测试的位置误差序列.....	86
图 4-4 A-INS 仿真测试的位置误差 Allan 曲线与理论分析结果对比.....	86
图 4-5 A-INS 仿真测试的短波轨道不平顺测量误差概率分布.....	87
图 4-6 A-INS 仿真测试的长波轨道不平顺测量误差概率分布.....	87
图 4-7 无 NHC 辅助时短波不平顺（仿真）测量误差概率分布.....	88
图 4-8 无 NHC 辅助时长波不平顺（仿真）测量误差概率分布.....	89
图 4-9 仿真测试的短波轨道不平顺测量误差概率分布.....	90
图 4-10 仿真测试的长波轨道不平顺测量误差概率分布.....	90
图 5-1 A-INS 铁路轨道几何状态测量系统（简称 A-INS 轨检小车）.....	92
图 5-2 小车车架侧视图.....	92
图 5-3 GNSS 天线杆臂示意图.....	93
图 5-4 轨距测量原理.....	95
图 5-5 轨距曲线改正原理示意图.....	95
图 5-6 InsRail 软件界面.....	99
图 5-7 InsRail 生成的轨道几何参数数据报表.....	99
图 5-8 InsRail 松组合解算流程图.....	101
图 5-9 对称型缓和曲线.....	106
图 5-10 重叠段拟合残差的搭接处理.....	107
图 5-11 A-INS 轨检小车及水准测量作业图.....	108
图 5-12 轨向偏差测量值.....	110
图 5-13 高低偏差测量值.....	110
图 5-14 轨道超高偏差/水平测量值.....	111
图 5-15 轨道轨距偏差测量值.....	111
图 5-16 短波轨向不平顺（30 m 弦，5 m 检核点对）测量值；.....	112
图 5-17 短波高低不平顺（30 m 弦，5 m 检核点对）测量值；.....	113
图 5-18 长波轨向不平顺（300 m 弦，150 m 检核点对）测量值；.....	113
图 5-19 长波高低不平顺（300 m 弦，150 m 检核点对）测量值；.....	114
图 5-20 A-INS 轨检小车的实测轨道偏差量与参考系统对比.....	115
图 5-21 A-INS 轨检小车实测轨道偏差量与参考系统实测轨道偏差量差异分布统计.....	115
图 5-22 常规静态轨检小车的高低偏差量测量值与水准测量结果的差异.....	115
图 5-23 A-INS 轨检小车的实测短波不平顺与参考系统对比.....	116
图 5-24 A-INS 轨检小车实测短波不平顺与参考系统实测短波不平顺差异的分布统计.....	116
图 5-25 A-INS 轨检小车的实测长波不平顺与参考系统对比.....	117
图 5-26 A-INS 轨检小车实测长波不平顺与参考系统实测长波不平顺差异的分布统计.....	117
图 5-27 不使用 NHC 辅助时的轨道偏差量测量误差.....	118
图 5-28 不使用 NHC 辅助时的轨道短波不平顺测量误差.....	119
图 5-29 不使用 NHC 辅助时的轨道长波不平顺测量误差.....	119
图 5-30 曲线段轨道中线设计线型.....	120
图 5-31 曲线段轨道偏差量多次独立测量之间的差异.....	120
图 5-32 A-INS 轨检小车正向滤波与反向平滑处理得到的轨道偏差量差异.....	121

## 表 目 录

表 1-1 绝对测量型轨检小车的主要研究现状 .....	9
表 1-2 相对测量型小车, 主要用于检测轨道部分内部几何参数 .....	11
表 1-3 各级平面控制网设计的主要技术要求 .....	12
表 1-4 轨道快速精密测量方案 .....	13
表 2-1 高铁轨道长弦测量作业验收容许偏差管理值 .....	24
表 3-1 纯惯导误差微分方程简化情景参数 .....	52
表 3-2 导航级 A-INS 组合导航系统误差参数 .....	64
表 4-1 惯导的运动状态设置 .....	84
表 4-2 A-INS 轨道测量的理论误差与仿真测试结果对比 .....	88
表 5-1 MP-POS830 的主要性能指标 .....	94
表 5-2 各传感器数据采样率 .....	98
表 5-3 InsRail 软件主要功能列表 .....	100
表 5-4 A-INS 轨检小车主要性能参数 .....	122
表 5-5 A-INS 轨检小车与常规静态小车作业模式对比 .....	122
表 5-6 A-INS 轨检小车与常规静态小车作业对比 .....	123

## 缩略词

A-INS	Aided Inertial Navigation System, 带有辅助信息的惯性导航系统
ARW	Angle Random Walk, 角度随机游走
CEP	Circular Error Probable, 圆概率误差
CPII	线路控制网 (铁路)
CPIII	轨道控制网 (铁路)
DGPS	Differential Global Positioning System, 差分 GPS
EKF	Extended Kalman Filter, 扩展卡尔曼滤波
GNSS	Global Navigation Satellite System, 全球导航卫星系统
GPS	Global Positioning System, 全球定位系统 (美国)
INS	Inertial Navigation System, 惯性导航系统
IMU	Inertial Measurement Unit, 惯性测量单元
MEMS	Micro Electro Mechanical systems, 微机电系统
NHC	Non-holonomic Constraint, 非完整性约束
PPK	Post Processed Kinematic, 动态后处理 (基于载波相位的差分 GNSS)
PSD	Power Spectral Density, 功率谱密度
RMS	Root Mean Square, 均方根
RTS	Rauch-Tung-Striebel, RTS 最优平滑算法
VRW	Velocity Random Walk, 速度随机游走



# 1 绪论

## 1.1 研究背景及意义

铁路轨道是机车车辆运行的基础,直接支承机车车辆的车轮,并引导其前进。轨道几何状态对轮轨系统的运行安全、行车速度、平稳舒适性、车辆部件寿命等起着决定性的作用(罗林,张格明 et al. 2006, )。轨道的运行维护和精调需要将变形的轨道调整至设计的平顺状态,其基本前提是精确确定轨道变形发生位置及变形量的大小。为了有效地做好轨道维护工作,快速准确的测量系统是必不可少的(Esveld 2001),精确测量轨道几何状态对于整个轨道的修护具有极其重要的意义。

钢轨及轨道中线本质上是一条三维空间曲线,可由其三维位置坐标序列进行描述。每一根钢轨均有两个自由度,并且两根钢轨组成的轨道可由超高、水平、轨向和轨距四自由度等效系统来描述。另一重要参数是三角坑,即在某一特定长度范围内的水平差。上述所有参数变量均为纵向里程的函数(Esveld 2001)。可以归纳出轨道精密测量本质上是要确定钢轨的三维位置坐标及两根钢轨之间的相对关系(轨距和水平等)。

高速铁路要求轨道具有极高的平顺性,因为在高速行车状态下,即使是微小的轨道变形也可能带来很大的轮轨作用力,影响行车安全和限制行车速度。高速铁路轨道几何状态测量的主要挑战在于如何实现快速精密测量。一方面,要求轨道三维位置坐标测量误差不大于 1 mm,才可能在 30 m 弦长范围内检测出 2 mm 的轨道不平顺(Glaus 2006, 科技基[2008]86 号 2008)。另一方面,在满足测量精度要求的基础上,对测量速度的要求也越来越高。因为可用于既有线轨道测量和维护的天窗时间非常有限,一般只有几个小时,且随着中国铁路建设的快速发展,新建线路的精密测量和既有线的后期维护任务非常艰巨(TB/T 2014)。

现有的轨道精密测量设备及方案的特点总结如下:测量精度高的方案往往作业速度太慢,无法在短时间内完成大量的精密测量任务;而测量速度快的方案往往又无法满足轨道精调的精度要求。因此,轨道几何状态精密测量亟需一种新的方法和技术,能在短时间内快速而精准地对轨道进行测量,同时满足效率、精度两个方面的要求。这是一个亟需解决的工程技术和方法问题。

本文针对上述轨道精密测量需求和困境提出了一种新的方法:以带有辅助信息的惯性导航系统(Aided Inertial Navigation System, A-INS)为核心测量设备,快速精密地(动态)测量铁路轨道的三维位置坐标、姿态和轨距,评估轨道几何状态。这一新方法首先需要从理论上回答这样两个问题:1) 诸如厘米级的 GNSS 外部辅助信息与惯导组合是否及何以能够实现亚毫米级的相对位置测量精度? 2) 什么精度等级的惯性导航系统才能够满足高铁轨道几何状态测量的精度要求,具体体现为惯导器件的各类误差如何影响 A-INS 轨道测量系统的最终精度? A-INS 组合导航在精密测量领域中的应用还很少,目

前尚处于一种针对具体应用个案，靠实践摸索来推进的被动局面。如果不能很好地从理论上回答上述两个问题，我们只能通过实践尝试这种“试误”的方法进行技术开发，代价昂贵、进展缓慢，理论研究的滞后已经严重影响了 A-INS 和惯性技术在精密工程测量中的应用。

本论文的研究正是基于回答 A-INS 用于高铁轨道精密测量的理论问题和解决实际工程技术问题的过程中展开的。以期方兴未艾的铁路轨道精密测量和惯性精密测量提供系统的理论方法和工程实践上的指导。

## 1.2 相关技术及研究现状

铁路轨道的平顺性直接影响列车行驶的平稳性，舒适性和安全性，所以对于轨道几何状态的评估和调整是线路检查和维护的主要工作之一。精确测量铁路轨道不平顺的幅值及其发生的位置是轨道精调和维护的前提条件。理想的轨道精密测量方法应能在实现快速精密测量的同时不影响正常的轨道交通(Glaus 2006)。

目前，铁路轨道几何状态的测量技术分为带荷载的动态检测技术和不带荷载的静态测量技术。其中动态检测技术主要包括轨道检查车、轨道综合检测车、车载式检查仪等；静态检测技术，此处“静态”主要是强调可以忽略车辆设备对轨道的荷载，主要包括基于经典大地测量手段的轨道几何状态测量仪(俗称轨检小车)，相对测量型线路检查仪，轨距尺和弦线测量等。国际上，主要是采用动态轨道检测车采集普通有砟轨道的几何数据，结合轨道不平顺管理规范，对轨道进行整体评价和维护。在国内，我们采用动态和静态相结合的方法对高速铁路轨道进行测量和维护。轨道检测历史悠久，检测方法多样，下面通过列举具有代表性的测量方案来简要回顾轨检技术的发展及各自的优缺点。

### 1.2.1 轨道动态综合检测技术

轨道动态检测方案主要是通过专用的轨道几何状态检查车和机车车载式轨道测量仪检测轨道在有荷载作用下的几何状态，主要是测量轨道的内部几何尺寸，评估轨道的平顺性。虽然本文所研究的 A-INS 轨道几何状态测量仪(简称 A-INS 轨检小车)属于静态测量的范畴，但高速铁路无砟轨道的动静态轨道不平顺差异极小，因此 A-INS 轨检小车的测量结果也能够真实地反映高铁轨道的几何状态。回顾动态检测技术的发展，尤其是惯性传感器及惯性技术在其中的应用对于新测量技术的研究具有很好的借鉴意义。

#### 1.2.1.1 轨道检查车

为了有效地做好轨道维护，专用的轨道几何状态检查车和综合检测列车成为各国轨道检测的首要技术方案。19 世纪末，代替人工检测的第一辆简易轨检车在欧美诞生(罗林，张格明 et al. 2006)，从 20 世纪 60 年代以后，欧、美、日等许多发达国家相继研发

出高新技术轨道检查车, 检测的精度、速度不断提高, 检测项目而也越来越完备(左玉良 2007, 韩峰 2015)。下面主要介绍各国比较有代表性的动态轨道检查车。

日本东海道铁路公司研制的新干线多功能检测列车“Doctor Yellow”, 测量时速可达 240 公里 (NAGANUMA, TANAKA et al. 2001, 仲崇成, 李恒奎 et al. 2013, 张继科 2014)。2002 年东日本铁路公司研发的“East-i”新干线电器轨道综合检测列车, 最高时速可达 275 km。美国 Ensco 公司研制的 T10 型检测列车, 采用惯性基准测量原理和非接触式测量方法, 检测速度可达 192 km/h(仲崇成, 李恒奎 et al. 2013)。美国 ImageMap 公司研制的 Laserail 轨道测量系统, 采用惯性基准原理和非接触式测量方法, 采用激光摄像、高速图像处理技术替代了光电伺服技术, 体现了轨道检测技术的发展方向, 测量时速可达 300 公里(仲崇成, 李恒奎 et al. 2013)。意大利铁路基础设施公司 (FS RFI) 的“阿基米德”号综合检测列车配置的轨道几何集成检测系统综合了惯性技术和三点弦测法, 代表着世界领先水平和发展方向(仲崇成, 李恒奎 et al. 2013)。法铁 (SNCF) 的“IRIS320”综合检测列车集成了线路检测所需的各类传感器, 检测项目齐全, 其设计目标是在列车正常行驶条件下采集线路参数。列车测速定位系统的信息来源包括转速、惯性系统、GPS/DGPS、线路特征数据等。英国路网公司 (Network Rail) 所属的“NMT”综合检测列车承担着对高速和既有线的检测任务(仲崇成, 李恒奎 et al. 2013)。著名的奥地利 Plasser & Theurer 公司生产的动态检测设备分为轨道记录车和轨道测量车两种类型。根据不同的测量速度分为不同的型号, 包括 EM-250、EM-160、EM-100、EM80H、EM30, 其主要特点是采用惯性基准测量原理, 除了测量轨道几何参数和车辆振动系数外, 还能测量环境图像、钢轨断面、轮轨作用力等。EM SAT-120 型轨检车能够精确测量轨道的各项几何参数, 将数据传送至联合作业的捣固机中, 主要用于有砟轨道的施工作业和轨道验收(Glaus 2006)。德国从 20 世纪 80 年代开展研制 OMWE 高速轨道检查车, 最高运行速度 300 km/h, 1995 年又在此基础上研制成功 RAILab 型轨检车。其技术特点是在车下建立一个测量框架, 在车内安装一个与框架相连的三轴稳定平台, 为轨道几何参数的测量建立一个惯性平台, 可测出轨道的高低、水平和轨向等参数(左玉良 2007)。荷兰 Eurailscout 公司生产的 UFM120 型轨检车是欧洲标准轨距线路通用检查车的代表, 同时也是新型的高科技快速检查车的代表。一次运行即可测量轨道的几何形位、接触网及钢轨的所有相关质量数据。UFM120 的所有设备均采用非接触方式, 非接触式几何形位测量系统的核心部件是一套惯性导航系统(Esveld 2001)。

我国的铁路动态检测主要以铁道科学研究院开发的系列轨道检测车或综合检测列车为主, 早期的轨检车主要采用机械式弦测法(罗林, 张格明 et al. 2006)。GJ-3 开始采用惯性基准轨道不平顺检测装置替代了弦测法。2001 年从美国 ImageMap 公司引进 LaserRail 后研制了 GJ-5 型轨检车, 仍采用惯性基准测量原理, 引入了车体振动加速度

测量系统、GPS 里程自动修正系统等。最新研制的 GJ-6 型轨道检测系统采用激光摄像式的轨道检测技术,采用实时控制技术进行精确控制和测量,实现了里程精确定位(魏世斌,李颖 et al. 2012, 韩峰 2015)。为适应我国高速铁路检测的需要,我国相继研发了 0 号高速综合检测列车和 CRH380A-001 高速综合检测列车,测量速度分别可达 250 km/h 和 350 km/h。综合检测列车采用惯性导航等技术,实现了毫米级精度的长波轨道不平顺实时在线检测等技术(仲崇成,李恒奎 et al. 2013)。

从国内外动态轨检车技术的发展可以看出:轨道不平顺的测量方法主要有弦测法和惯性基准法两大类,惯性传感器及惯性技术在轨检车的发展上具有举足轻重的作用。现代轨检车普遍采用惯性基准法,且加速度积分与位移相加法成为实用化的“惯性基准法”(罗林,张格明 et al. 2006)。其基本原理为:当车轮不脱离钢轨时,车轮轴箱的上下运动(轨道的高低不平顺)等于车体的上下运动与车体和轴箱间相对位移之和;车体相对其惯性基准线的位移可用加速度计测的车体加速度经二次积分得到,车体与轴箱间的位移可用位移传感器测得(Lewis 1984, Gilbert 2006, 罗林,张格明 et al. 2006)。基于惯性基准法的动检车为了滤除频率极低、变化缓慢、数值很大的轨道高程变化和滤除坡度变化、曲线超高等这些无需测量的参数的影响,必须引入高通滤波器。高通滤波器的截止频率随车速度的变化而切换(罗林,张格明 et al. 2006)。此外,还需要对因曲线超高、较大水平不平顺等引起的车体倾斜、侧滚产生的相应加速度进行修正,才能得到精度较高的结果。

#### 1.2.1.2 车载式轨道测量仪

专用的轨检车和综合检测列车价格昂贵,路局保有数量有限;技术复杂,要保持整个系统正确稳定地工作代价高昂(Weston, Ling et al. 2007),很难对轨道进行经常性的面面俱到的检查。因此,各国均开始研究车载式检测设备作为轨检车的辅助方案,通过频繁地监测车辆动态来间接的推断轨道的几何状态。

车载式轨道检测系统主要是将加速度计、陀螺仪和位移传感器等设备安装在机车的不同部位用于直接或间接地采集位移和加速度等信息,进而推断轨道的几何状态。典型的方案是将加速度计安装在轴箱上测出轴箱加速度,经时间二次积分运算和高通滤波处理转换为轴箱的横垂位移信号,从中提取出短波高低不平顺和钢轨磨损等几何参数,称为轴箱加速度积分法(Grassie 1996, Sunaga, Sano et al. 1997, Weston, Ling et al. 2007, Weston, Ling et al. 2007, Real, Salvador et al. 2011, Tsunashima, Naganuma et al. 2011, Tsunashima, Matsumoto et al. 2012, Wang, Qin et al. 2012, Huang, Zhang et al. 2013, O'Brien, Bowe et al. 2015)。Boronakhin 等人提出在轮对的轴箱上安装多个 MEMS 惯性测量单元测量轴箱的垂向运动轨迹,并对各 IMU 实测的轴箱速度进行信号互相关分析得到可靠的钢轨病害信息,从而实现一个集成了 MEMS 惯导、卫星导航、里程计和位移传感器

的轨道病害检测系统(Boronakhin, Podgornaya et al. 2011, Boronahin, Filatov et al. 2014, Boronahin, Filatov et al. 2015)。然而, 轴箱加速度积分法在实际应用中存在几个问题: 1) 高速运动时, 轴箱的加速度可高达 100 g, 而长波不平顺引起的加速度却又异常微弱, 这就要求加速度计必须拥有很大的量程和很高的分辨率。这种要求过于苛刻, 因此该方法很难提供有效的长波不平顺测量结果(Grassie 1996)。2) 加速度测量值受车体姿态的影响, 必须对姿态角的变化进行精确的补偿。3) 测量精度与测量速度强相关: 轨道几何状态引起的加速度与速度的平方成正比, 当速度较低时加速度计测量值的信噪比太低。而高速运动时安装在轴箱上的加速度计等传感器由于受到很大的加速度冲击, 设备故障率较高(Tsunashima, Naganuma et al. 2014)。

针对这些问题, 另一种典型的方案是将惯性传感器(加速度计和陀螺仪)安装在转向架或车体上, 因为经过主悬挂系统的转向架框架和二级减震的车体能够很好地吸收和隔离高频的加速度冲击。Weston 等人在文献(Weston, Ling et al. 2007, Weston, Ling et al. 2007)中将俯仰和航向速率陀螺安装在转向架构架上, 陀螺实测曲率对行走距离作二次积分再通过一个高通滤波器来估计出轨道轨向和高低不平顺, 这种方法也被称作陀螺仪轨迹法。相比于加速度积分法, 陀螺仪轨迹法即使在车速低至 1m/s 的情况下也能提供稳定的检测结果, 并且不需要对转向角的横滚效应进行补偿, 因为航向速率陀螺测量值不易受横滚角误差的影响。Bagshawe (Bagshawe 2013)将 MEMS IMU 安装在列车的不同位置(转向架、转向架框架), 来检测对应的垂向位移。文章(Tsunashima, Naganuma et al. 2011, Tsunashima, Matsumoto et al. 2012)归纳了日本现有高速铁路中使用的轨道状态检测系统, 基于客车车辆上的检测设备能够较早地发现轨道问题并制定相应的维护计划。

文章(Alfi and Bruni 2008)描述了一种通过车体加速度测量值来估计长波不平顺的方法: 基于轨道不平顺与车辆动态之间的输入-输出传递模型, 根据车体加速度测量值则可根据模型反演轨道不平顺, 在频域内将轨道不平顺分解成不同的谐波分量。文章(Tsunashima, Naganuma et al. 2014)介绍了通过车体振动加速度来反演推算轨道不平顺的方法, 在新干线上验证了只通过车体震动来估计轨道几何形状的可能性。测试结果表明垂向轨道不平顺的估计达到了实际应用的精度要求。文章(Wang, Qin et al. 2012)介绍了一种通过转向架和车厢加速度测量值反演轨道垂向和轨向不平顺, 通过仿真分析了方法的有效性。文章(Kawasaki and Youcef-Toumi 2002)介绍了通过客车车厢加速度测量值反演轨道不平顺, 这类方案无法准确区分轨道不平顺和其它因素引起的车厢振动。文章(YAZAWA and TAKESHITA 2002)提出惯性测量法, 其基本思想是对车厢加速度测量值进行二次时间积分获得位移量, 为克服精度发散的问题必须使用高通滤波器, 而这又不可避免地使所测得的轨道不平顺波形存在失真的问题。

可以看出动态检测设备大多是使用单独的惯性传感器测量加速度或角速度,通过积分运算推算轨道不平顺。但由于加速度计和陀螺测量值都包含测量误差,积分运算使得测量误差不断积累,仅通过高通或低通滤波器是无法从根本上解决这一问题的。近年来,越来越多的动态轨检方案使用了组合导航系统来解决精度发散的问题。Lück 等人在其论文(Lück, Löhnert et al. 1997, Lück, Kreye et al. 2001)中提出采用高精度 DGPS/INS 组合导航技术测量铁路线路特征及轨道不平顺(测量 150 m 以上波长的轨道不平顺)的方法,明确提出了毫米级的精度需求。在其文章中介绍了车载轨道精密测量系统的架构设计及关键技术点,其中 DGPS/INS 用于确定测量平台的位置和姿态,由此推算轨道几何形位。实验结果表明在特定情况下该方案可实现毫米级的位置精度(误差统计值),但距离高铁轨道精密测量的精度要求仍有不小差距。Applanix 公司与 Plasser & Theurer 公司联合开发的 POS/TG 系统,将 IMU 与光学轨距测量系统安装在轴箱或转向架上,进行定位定姿解算获取高精度的位置和姿态,从而推算出钢轨的各项轨道几何参数。由于使用了组合导航系统,惯导的误差能够得到有效的修正,在低速运动的情况仍能保持较高的测量精度,具备检测长波不平顺的能力,同时该系统也可用于列车的精确定位。该系统装备于 Plasser & Theurer 公司的 EM 系列轨检车上(Oberlechner, Metzger et al. 2000, Mostafa, Hutton et al. 2001, van der Merwe and Venter 2001, Zywił and Oberlechner 2001, Wenty 2007),但相关技术是保密的。

相比于专用的轨检车,车载式测量系统能够对轨道进行高频次检测(罗林,张格明 et al. 2006),采集丰富的轨道几何状态数据,进而分析轨道变形规律及演化趋势(Boronahin, Larionov et al. 2016)。但车载式测量系统大多属于间接测量,存在以下问题:1) 行车速度对振动加速度的影响很大,振动加速度的大小与轨道不平顺之间不存在单一的对应关系。2) 车辆的悬挂参数、减振性能对测量结果影响较大。同一轨道不平顺激励所引起的振动加速度会因机车的型号不一样也有所不同。3) 车体振动加速度往往是多种轨道不平顺激励引起的综合响应。车体垂向、横向振动加速度都不能确切区分是由何种轨道不平顺引起的,不能用来精确测量轨道的变形量/不平顺幅度(罗林,张格明 et al. 2006)。

### 1.2.1.3 动态检测小结

专用的轨检车和综合检测列车能够有效地检测和评估轨道的整体状况,并指导制定轨道养护计划。但是,轨道几何状态的精密测量不仅要求准确测出轨道的变形量和轨道不平顺幅度,还必须精确定位出轨道不平顺发生的位置。从这个角度看,即使是目前最先进的轨检车或综合轨道列车也难以满足这一要求。首先,专用轨检车和综合检测列车造价昂贵,作业过程中需要很多部门配合执行,对机车购置、人员的作业成本都很高,不适合用于局部问题路段的精密测量。其次,难以精确确定轨道变形发生的位置;即使

是我国最先进的高速综合检测列车的里程定位精度目前也只能做到 1m 左右,这与轨道精调所要求的里程定位精度仍有差距。在检修的过程中无疑又得通过其它技术手段在给定的区域内再次确认异常点的精确位置。

尽管动态检测列车具有高效、高速、综合测量等特点,但无论是装备率还是便利性上,皆不足以支撑工务部门的日常养护工作。而车载式轨道几何状态测量方案只是间接反演轨道的状态,其精度根本无法满足轨道精调的要求。因此,目前动态检测手段无法在轨道精密测量领域完全取代便携式静态轨检小车,工务部门仍需采用轨检小车对问题路段进行精密测量。动态检测和轨检小车技术之间的关系是互补而不是相互替代的(魏晖 2014),这也是包括本文研究的 A-INS 轨检小车在内的便携式轨道几何状态测量仪(又称轻型轨检小车)的生存空间和价值所在。

### 1.2.2 轻型轨检小车技术

轻型轨道几何状态测量仪(俗称轨检小车)是一种可检测无轮载作用时静态轨道几何状态的便携式测量系统。之前轨检小车在我国未能得到广泛应用,主要是因为无砟轨道的轨道不平顺动/静态差异较大,静态小车的测量结果不能很好的反映轮载作用下的真实轨道几何状态(罗林,张格明 et al. 2006)。但是高速铁路、城市地铁和有轨电车等无砟轨道的不平顺性动/静态差异很小,轨检小车的测量结果能够有效反映真实的轨道几何状态。近年来,高速铁路的快速发展使得轨检小车在我国逐渐得到了广泛的应用,甚至成为了不可或缺的测量仪器。

轨检小车根据其核心测量技术和测量原理的不同大致可以分为绝对测量型轨检小车和相对测量型轨检小车。绝对测量型轨检小车依赖轨道控制网,能够测量轨道的外部几何参数。但这种分类并不严格,因为有些小车既能进行相对测量,又能进行绝对测量。下面将选取有代表性的轨检小车进行论述。

#### 1.2.2.1 绝对测量型轨检小车

绝对测量型轨检小车在我国高速铁路的建设中发挥了重要作用,国内外都进行了大量的研究,其技术已经很成熟。最具代表性的绝对测量型轨检小车是瑞士安伯格公司(Amberg Technologies)的 GRP 系列小车,主要用于绝对测量的是 GRP1000;该系统以高精度自动跟踪全站仪(如 Leica TCA 2003)为核心测量设备,移动端包含车架、轨距传感器、倾斜传感器和里程计等。该系统能够测量钢轨在 CPIII 控制网下的平面坐标和高程、轨距和水平,进而推算出所需的全部轨道几何状态参数。在设站条件和观测条件较好的情况下采用“走走停停(stop-and-go mode)”模式可实现 1~1.4 mm 的位置测量精度。为提高测量速度,Amberg 公司开发了 Amberg IMS 1000 系统,将惯性测量单元(IMU)和全站仪同时安装在轨检小车上,依靠惯导进行坐标递推以减低全站仪的测

量频率(Technologies)。美国天宝公司的 Trimble GEDO 系统(Trimble, 郭榕刚 2015) (收购自德国 Sinning 公司), 其测量原理和作业模式与 Amberg GRP1000 相似。苏黎世联邦理工学院 Ralph Glaus 博士开发的瑞士多功能小车“Swiss Trolley”(Wildi and Glaus 2002, Glaus 2006), 集成了全站仪、GPS、激光扫描仪和高速相机等测量传感器, 能够实现轨道的绝对测量, 且具有多种不同的作业模式, 可谓是多功能轨检小车研究的典范。德国斯图加特大学开发的 Rhomberg 轨道测量小车以高精度全站仪为核心测量设备, 主要用于板式轨道精调, 标称 0.5 mm 的相对精度。土耳其的耶尔德兹技术大学的 Burak Akpinar 博士, 开发了一套集成了 GNSS 接收机、全站仪、倾斜仪等传感器的轨道几何状态测量仪, 并采用了自适应卡尔曼滤波模型来估计轨道几何参数(Akpinar and Gulal 2012, Akpinar and Gülal 2013)。

国内大多数铁路基础建设单位和铁路运营维护单位使用的轨检小车仍以进口产品为主, Amberg GRP1000 和 Trimble GEDO 是其中两个应用最广泛的品种, 占据了我国轨检小车的大部分市场份额。近年来, 随着我国高速铁路建设的迅猛发展, 轨检小车的的需求越来越大, 国内公司和研究单位开始从模仿国外轨检小车逐步走向自主研发, 相继推出了各自的绝对测量型轨检小车。主要有原广州南方高速铁路测量技术有限公司(南方测绘集团的子公司)(张晓江, 张翔 et al. 2014)、成都普罗米新科技有限公司(陈心一, 唐杰 et al. 2009)、江西日月测控科技股份有限公司(江西日月测控科技股份有限公司)、深圳大铁检测装备技术有限公司、长沙悦诚机电科技有限公司(应立军, 吴湘华 et al. 2008)、中铁工程设计咨询集团有限公司(张金龙 2011, 曾若飞, 张金龙 et al. 2013)、中铁七局集团有限公司(丁喜成 and 张体强 2010, 丁喜成 and 张体强 2010)、中铁二院工程集团有限责任公司(王国祥, 卢建康 et al. 2013)、中铁第一勘察设计院集团有限公司(王争鸣, 任晓春 et al. 2015, 王争鸣, 任晓春 et al. 2015)、中铁第四勘察设计院等(冯光东, 郭良浩 et al. 2013, 冯光东, 郭良浩 et al. 2013)。

虽然各厂家的绝对测量型轨检小车均有各自的特点, 但其基本原理和作业模式一致: 高精度自动跟踪型全站仪在轨道中间自由设站, 后视 6-8 个 CPIII 控制点, 后方交会得到测站坐标; 然后全站仪自动跟踪和测量轨检小车棱镜中心的三维坐标, 结合事先严格标定的轨检小车几何参数和定向参数、轨距和水平的实测值推算出两股钢轨的平面位置和高程, 与设计参数对比得到轨道偏差量和轨道不平顺等参数。作业过程中在每根轨枕处进行静止测量(每根轨枕测量约耗时 10 s), 全站仪每次设站的有效测量距离(全站仪与棱镜之间的距离)大约 70 m; 然后重新设站, 重复上述测量过程。

绝对测量型轨检小车的优势在于: 在 CPIII 控制点质量和观测条件良好的情况下, 可实现约 1~1.4 mm 的绝对位置测量精度, 在轨道放样和控制轨道各项外部几何参数方面具有不可替代的作用。



另一方面，由于我国高速铁路测量沿用了部分德国高铁的建设和维护标准，目前仍然采用绝对测量的方式来控制轨道的内部几何尺寸，例如新建线路长轨精调和既有线运营维护时的轨道平顺性控制。虽然绝对小车根据绝对坐标测量值也能有效控制轨道的平顺性，但却不是最优的方案。原因如下：1) 效率低下：作业速度约 150 m/h，高铁线路天窗时间内只能完成 600 m 左右的轨道测量任务，无法完成问题路段的全面检测；2) 对轨道控制网 (CPIII) 的完全依赖性给实际测量带来诸多不便，因为实际 CPIII 控制点存在维护成本高，精度难以保证等问题；3) 对测量环境要求苛刻：全站仪受外界测量环境影响较大，如温度、湿度、折光等，恶劣条件下基本不能作业；4) 受全站仪测量距离的限制需要频繁地进行全站仪换站和测段搭接，引入“搭接误差”。

表 1-1 绝对测量型轨检小车的主要研究现状

技术原理	主要特点	代表性研究单位	
以传统光学测量方法（高精度全站仪）测量轨道的各项外部几何参数	优点：测量精度高；绝对控制	国外	Amberg (瑞士); Trimble GEDO (美国); 苏黎世联邦理工学院; 土耳其的耶尔德兹技术大学
	缺点：测量速度慢；容易受环境因素的影响；	国内	南方高铁; 普罗米新; 日月明; 深圳大铁; 长沙悦诚机电科技有限公司; 中铁工程设计咨询集团有限公司; 中铁七局集团有限公司; 中铁二院工程集团有限责任公司; 中铁第一勘察设计院集团有限公司; 中铁第四勘察设计院; 武汉锐进; 西南交通大学; 南昌大学

### 1.2.2.2 相对测量型轨检小车

相对测量型轨检小车主要用于测量轨道内部几何尺寸参数（例如轨道不平顺），不同的小车所用的测量技术差异较大，但几乎都可在动态检测技术中找到其技术根源。主要有弦测法、惯性测量法、激光长弦和其它新型测量手段。研究相对测量型轨检小车的单位较多，下面主要从技术的角度和现有产品来阐述其现状。

基于弦测法开发的相对测量型轨检小车可测量轨道正矢和纵平等参数，国内有长沙悦诚和西南交大开发了这一类型的轨检小车(应立军, 吴湘华 et al. 2005, 应立军, 周书武 et al. 2005, 王平, 王源 et al. 2015)。

基于惯性测量法的相对测量型轨检小车的原理大都与陀螺仪轨迹法类似：通过陀螺仪或惯性测量单元测量轨道的方位角和坡度角，并对行走距离积分得到轨道的横、垂坐标分量，进而计算轨道的平顺性参数。成都四方瑞邦开发的相对测量型静态轨检小车正是基于两个陀螺仪测量轨道的方向和高低参数(傅勤毅, 何发明 et al. 2007)。江西日月明公司开发的 GJY-T-EBJ 系列轨道检查仪也是基于数字陀螺仪测角原理(江西日月明测

控科技股份有限公司，魏晖 2014)。韩云飞博士用 GPS 双天线辅助惯性导航系统的方式分别得到单根钢轨的方位角和坡度角，对角度测量值进行拟合来构建钢轨的最优线型，角度的拟合残差对里程积分来推算轨道偏差量和轨道不平顺等几何量(韩云飞 2012, 韩云飞 2013)，其原理与陀螺仪轨迹法也是类似的。基于陀螺仪轨迹法的方案能够实现轨道内部几何尺寸的快速动态测量，但是其缺点也是很明显的：陀螺角速度测量误差（零偏误差和噪声等）会造成方位角和俯仰角误差，再对里程积分会进一步造成轨道坐标、轨道偏差量和轨道不平顺等测量精度的发散。即使采用了组合导航方案，但角度对距离积分仍然是一个精度发散的过程。为解决这一问题，引入外部校正是一种有效但不能从根本上解决问题的方案。成都四方瑞邦在惯性测量的基础上，在测段的首尾加上全站仪绝对测量值修正(傅勤毅 2011, 傅勤毅, 何发明 et al. 2012)，瑞士安伯格公司也开发了类似的产品 Amberg IMS 1000/3000 (Technologies, 白洪林, 张发成 et al. 2015)。引入全站仪坐标修正能够在一定程度上抑制惯性测量精度的发散，且能将惯导的相对测量值统一到 CPIII 坐标系下；相比于绝对测量型轨检小车，其效率还是有比较明显的提高，但频繁地使用全站仪修正仍会降低测量效率。

基于全站仪的双车轨道几何状态测量系统也可用于检测轨道的内部几何状态参数(郑小飞 2010, 曾若飞, 张金龙 et al. 2013)，这一方案相比于绝对测量型轨检小车速度有所提高，但一般来说精度不如静态测量高，且仍然具有采用全站仪测量的诸多缺陷。激光长弦也常用于轨道平顺性的检测，如哈尔滨安通测控开发的轨道几何状态测量仪(郑小飞 2010)则利用激光的准直特性和二维面阵激光接受靶，对轨道平顺性进行高精度检测评估，单次测量距离可达 200m。该方案对激光的精度要求较高，实际使用过程中对测量环境的要求也异常苛刻，容易受环境因素（如温度、大气遮光等）的影响。国内外学者探索将更多的新型技术引入轨道相对测量领域，包括近景摄影测量(陈强, 刘丽瑶 et al. 2014)和激光扫描(Liu, Li et al. 2013)。

目前，相对测量型轨检小车主要用于轨道几何状态检测而非精密测量；但丰富多样的相对测量型轨检小车给我们提供了诸多值得借鉴的新思路。对相对测量思想的深刻认识有助于我们拓宽轨道几何状态测量的研究思路，探索更多的新方案来推动轨道测量技术的发展。

表 1-2 相对测量型小车，主要用于检测轨道部分内部几何参数

技术原理	主要特点	代表性研究单位
陀螺仪轨迹法 (惯性)	主要检测轨道部分内部几何参数； 不适用于轨道精调作业	四方瑞邦；日月明；西安奥通数码（韩云飞）
弦测法	类似动检，主要检测轨道部分内部 几何参数；不适用于轨道精调作业	长沙悦诚机电科技有限公司；西南交通大学；南昌大学
激光长弦	短距离内相对测量精度高；容易受 环境影响	哈尔滨安通测控
其它测绘技术	摄影测量，激光扫描	西南交通大学

### 1.2.2.3 新型轨道检测技术

从前面的讨论可以看出，我国高铁轨道的平顺性控制主要还是采用绝对测量型轨检小车，这与我国沿用了国外高铁标准和作业模式有一定关系。以全站仪为核心测量设备的绝对测量型轨检小车用“绝对”坐标来描述轨道的几何状态，理论严密，但在测量效率和适用性上难以取得突破。为此我们需要对这一测量理论中的“绝对精度”进行重新审视和澄清。

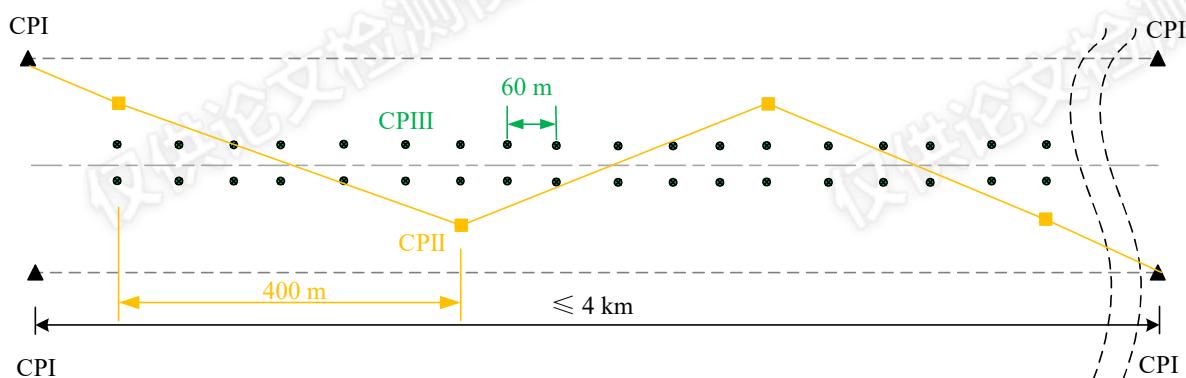


图 1-1 高铁无砟轨道三级平面控制网布设示意图

从绝对测量型轨检小车的作业模式可以看出，其所谓“绝对精度”是相对于 CPIII 控制网而言的，因为全站仪是完全依赖于 CPIII 控制点进行自由设站的。从高铁无砟轨道三级平面控制网的布设情况(如图 1-1)及技术要求(如表 1-3)可知轨道控制网 CPIII 点与附近的线路控制网 CPII 点联测；而 CPII 又起闭于基础平面控制网 CPI 点。那么基于该控制网进行轨道质量控制，钢轨的位置精度在大尺度上取决于 CPII 和 CPI，小尺度上的轨道平顺性则主要取决于 CPIII 的相对点位精度。例如：在 CPIII 控制网下用绝对测量型轨检小车放样的直线轨道，即使没有放样测量误差，从 1000 m 的尺度上看该轨道也并不是一条严格的直线；其偏离理想直线的误差可能达到几个毫米甚至 1 cm（取决于 CPII 点位精度）。但从几十米的尺度上看，其直线度很好，偏差能控制在 1 mm 左

右（取决于 CPIII 相对点位精度），能够满足高铁平顺性的要求。实际作业过程中全站仪频繁换站（大约 60-70 m 换一次）带来的“接边误差”会进一步降低测量精度，因此用绝对测量型轨检小车进行长轨精调往往需要调整 3-4 次才能达到高铁平顺性的要求。

表 1-3 各级平面控制网设计的主要技术要求

控制网	测量方法	测量等级	点间距	相邻点的相对中误差
CPI	GPS	二等	≤4 km 一对点	10 mm
CPII	GPS	三等	600~800 m	8 mm
CPIII	导线	三等	400~800 m	8 mm
	自由测站边角交会	/	50~70 m 一对点	1 mm

这就意味着绝对测量型轨检小车本质上只是保证了轨道大尺度上的厘米级绝对精度和小尺度上的 1 mm 相对精度，并未实现全线 1 mm 的绝对精度。并且用绝对测量的方法来控制轨道的相对精度，大大降低了测量作业的效率，其必要性值得商榷。只有看清了绝对测量型轨检小车“绝对精度”的这一本质，我们才能突破“用绝对测量控制相对线型”的束缚，探索一种更加合理的、兼顾绝对精度和相对精度的快速精密测量手段。因为动态条件下实现 1 cm 绝对精度和 1 mm 相对测量精度的测量选择更加丰富。

基于这一思路部分学者和研究单位开始了新的探索。韩云飞博士于 2010 年将双天线 GPS/INS 组合导航技术用于轨检小车上实现对钢轨轨向和高低不平顺的动态检测，并设计了相应的轨检小车(韩云飞 2012, 韩云飞 2013)。该方案的基本假设是钢轨通过绝对测量型轨检小车进行测量放样之后已经保证了 1 cm 的绝对精度，那么长轨精调只需在此基础上将轨道调平顺即可。这种基于 GPS/INS 组合导航系统检测轨道不平顺的方案对于轨道测量技术的发展具有重要意义。但是其设计的轨检方案尚不能检测轨道超高和轨距，同时角度拟合残差对距离的积分运算也会带来精度发散，影响轨道调整量的计算精度，若用于轨道精调仍有待完善和改进。2013 年牛小骥教授和陈起金提出用高精度 GNSS/INS 组合导航的三维位置坐标描述轨道的几何状态(牛小骥, 陈起金 et al., Chen, Zhang et al. 2013, Chen, Niu et al. 2015)，该方案在保证 1 cm 绝对精度的同时充分利用 GNSS/INS 的相对测量能力测量轨道的各项内部几何尺寸参数，计算轨道偏差量用于指导轨道精调。基于该技术设计了 A-INS 轨检小车。为解决 GNSS 信号受到干扰或被遮挡时影响系统精度的问题，之后又改进了组合导航算法提出了基于 A-INS 技术的轨道测量方案(牛小骥, 章红平 et al.)。

因此，设计实现一套稳定可靠的、精度达标、测量速度快、可用于轨道精调的 A-INS 轨检小车是本文的一个重要目标。

表 1-4 轨道快速精密测量方案

研究单位	技术特点
Amberg; 四方瑞邦; 日月明	基于绝对测量型轨检小车进行改良升级, 提高测量速度; 在两次绝对位置测量之间, 用陀螺仪(姿态)与里程计进行坐标推算, 最后对误差进行平差处理; 属于 A-INS 组合精密测量的一种简易实现
武汉大学	通过 A-INS 组合导航技术实现轨道的快速精密测量

### 1.2.3 A-INS 组合导航误差传播相关研究

惯性导航和 A-INS 组合导航技术已广泛应用于武器制导、航空航天和车载移动测图等导航定位应用领域, 为载体提供绝对位置和姿态参考。另一方面, 惯导出色的相对测量能力也逐渐受到关注和重视, 并在精密工程测量领域取得了一些成功的应用, 如道路平整度测量和本文所研究的轨道不平顺测量等(Niu, Chen et al. 2016)。前一类应用称为导航定位, 后者我们称之为惯性精密测量。

A-INS 组合导航误差是一个随机过程。导航定位与惯性精密测量对误差的关注点(如误差的类型)是有很大区别的, 如图 1-2 所示。导航定位应用主要关注该随机过程各时刻的统计特性: 将各时刻的误差看成随机变量, 研究其统计值(如各时刻导航误差的均方根)及其传播规律而无需研究随机过程的特性及历元之间的误差相关性。惯性精密测量则恰好相反, 其关注的重点在于误差的随机过程特性及误差在历元间的相关性, 基于误差的随机过程特性来研究误差传播规律和相对测量精度。

针对传统的导航定位应用, 已经形成了一套完备且成熟的惯性导航绝对误差传播理论和分析方法。GNSS/INS 组合导航的绝对误差传播主要还是采用分析和仿真相结合的方法来研究, 具体可参考(关肇直, 王恩平 et al. 1984, Savage 2000, Savage 2000, Titterton and Weston 2004, Britting 2010, Groves 2013, 秦永元 2014)。由于研究对象的不同, 针对绝对导航误差的研究理论无法回答 1.1 节中所述的 A-INS 轨道精密测量中遇到的两个问题。但是这两个问题对于 A-INS 铁路轨道精密测量应用来说又是非常重要的且无法回避的。第一个问题关乎 A-INS 轨道测量方案的可行性, 第二个问题涉及 A-INS 轨检小车系统设计与具体实现。本文将从理论上回答这两个问题: 建立 A-INS 测量误差的传播模型, 分析测量误差的随机过程特性, 基于误差传播模型定量分析轨道几何参数的测量误差。

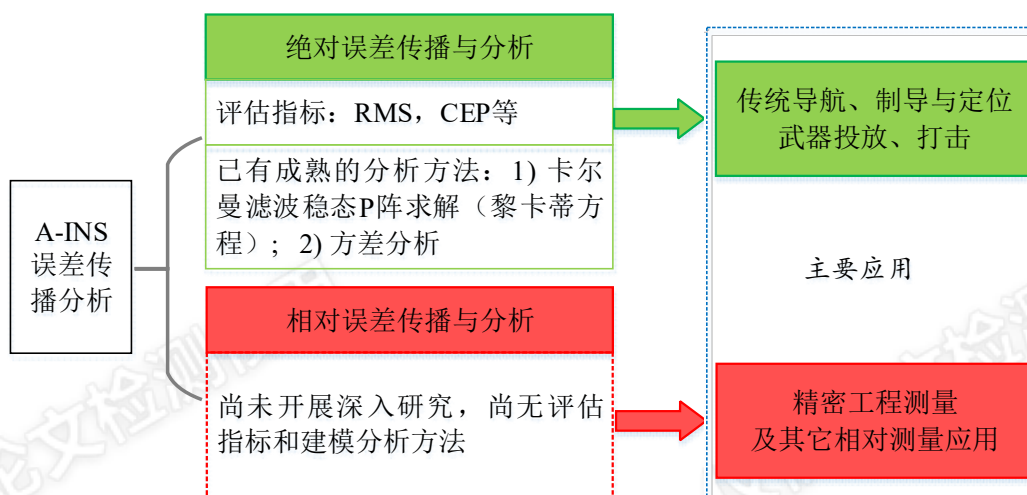


图 1-2 绝对误差与相对误差及其研究方法的差异

从惯性精密测量的角度来看，A-INS 误差传播方面的前人工作较少。武汉大学张提升博士和班亚龙博士在他们深组合研究中，对惯性辅助环节的误差进行了细化建模，针对不同的动态条件，定量分析了各类误差源随时间的传播关系及其对跟踪环路的影响。虽然其研究对象仍然是绝对误差而非误差的随机过程特性和相对误差，但其建模思路值得本文借鉴(张提升 2013, 班亚龙 2016)。武汉大学张全在其博士论文中，提出了 GNSS/INS 组合导航短期相对精度的概念，并用 Allan 方差分析方法，从应用层面分析了 GNSS/INS 最终导航结果的相对精度(张全 2015)。

Maybeck 针对单维度位置/惯导的组合导航系统性能进行过理论分析(Maybeck 1982)，通过分析稳态卡尔曼滤波的特性，得到了卡尔曼滤波最优估值与系统输入噪声（惯性传感器噪声和量测噪声）之间的函数关系。Maybeck 并未进一步分析导航误差的随机过程特性和完整的 A-INS 误差传播模型，但其研究思路给了本文很大的启发：针对特定的应用场景，A-INS 组合导航的误差传播并未复杂到完全无法做理论分析的地步；A-INS 组合导航连续时间间接卡尔曼滤波达到稳态后可以看作一个可分析的线性时不变系统。完全确定 A-INS 误差传播规律是一个非常复杂的问题，之前人们一直利用仿真的方法对此开展研究(Groves 2013)。目前，国内外还没有相关文献针对 A-INS 精密测量的相关理论问题开展过全面和系统的研究；只有少量文献对该问题给予了关注和讨论，且都是在各自的应用背景下给出相对简单和定性的描述。诸如某级别的惯导器件用在某精密测量系统中是可以满足要求的；或者惯性器件精度等级越高，系统的测量误差越小之类的定性结论。

综上所述，A-INS 测量误差传播模型和误差定量分析方法的缺失在很大程度上阻碍了 A-INS 组合导航技术在精密工程测量中的应用与推广。本文将针对轨道几何状态测量这一特殊应用，建立 A-INS 轨道测量误差传播模型，为 A-INS 轨道几何状态精密测量系统提供一套有效的“仪器误差”分析方法。

### 1.3 论文的研究目标

本文探索基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何状态精密测量技术，突破相关的核心理论和实践问题。提出以下研究目标：

- (1) 建立一套针对铁路轨道测量应用的 A-INS 测量误差传播模型，以及基于该模型的误差定量分析方法。采用该理论模型和方法分析 A-INS 测量误差的随机过程特性，并对 A-INS 轨道测量误差做定量分析。
- (2) 设计并优化基于 A-INS 组合导航技术的轨道几何状态精密测量系统，包括硬件平台和数据处理软件；满足高铁轨道几何状态测量的各项精度指标，且测量效率较传统手段有显著提升。

### 1.4 论文的研究内容与结构安排

论文的研究内容总体上包括两大部分：第一部分主要研究 A-INS 轨道测量误差传播模型及误差定量分析。第二部分则探讨 A-INS 轨检小车的具体设计与实现。绪论之后各章的主要研究内容安排如下：

第二章介绍了基于 A-INS 组合导航技术的铁路轨道几何状态测量技术基础。阐述了铁路轨道几何状态参数的定义、轨道不平顺的精度指标和评估方法；明确了轨道几何状态精密测量的技术难点，指出了轨道不平顺的“相对测量”本质；提出了 A-INS 轨道几何状态精密测量方案及其基本原理；并详细描述了惯性导航及适用于轨道测量场景的 A-INS 组合导航算法，作为后续 A-INS 轨道测量精度理论分析的基础。

第三章研究了 A-INS 轨道测量误差传播模型，定量分析了轨道测量误差。从轨道不平顺的定义出发，分析其测量误差与 A-INS 误差之间的关系，明确了误差传播模型的具体研究对象；提出了建立 A-INS 测量误差传播模型的基本方法，即研究 A-INS 组合导航连续时间间接卡尔曼滤波达到稳态时的系统传递函数；建立了 A-INS 组合导航系统高程通道和水平通道的误差传播模型；基于建立的误差传播模型，分析了 A-INS 测量误差的随机过程特性，并对轨道几何参数测量误差做了定量分析。最后利用所提出的理论方法研究了非完整性约束的重要作用，指出了影响轨道不平顺测量精度的主要惯性传感器误差。

第四章以数据仿真的方法对第三章建立的 A-INS 轨道测量误差传播模型和误差理论分析结果进行了验证。介绍了 A-INS 组合数据仿真的基本原理。对 A-INS 绝对位置误差、位置误差的随机过程特性（用 Allan 方差来表征）及轨道不平顺测量精度进行了验证。仿真结果为 A-INS 测量误差传播模型及误差定量分析方法的有效性提供了有力的佐证。

第五章设计并实现了 A-INS 轨检小车原型系统，并对 A-INS 轨检小车的整体性能进行了全面的测试与评估。介绍了 A-INS 轨检小车的设计和实现思路，阐述了 A-INS

轨检小车的硬件平台实现的关键点，详细描述了 A-INS 轨检小车轨道测量数据算法和软件实现。然后通过实际轨道测量实验对 A-INS 轨检小车的各项主要性能指标进行了评估和优化，测试了 A-INS 轨检小车的内符合精度和外符合精度，验证了 A-INS 轨检小车整体方案的可行性。

第六章总结了全文的主要工作和研究结论，指出了进一步研究的方向。



## 2 基于 A-INS 的铁路轨道几何状态测量技术

### 2.1 引言

基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何状态测量技术研究，既要求掌握铁路轨道知识及几何状态测量技术，又要求熟悉惯性导航及 A-INS 组合导航技术，这两方面是 A-INS 轨检小车研发的基础。因此，本文将重点介绍铁路轨道几何状态及其测量原理、惯性导航原理及组合导航算法，为后续研究工作提供基本概念和理论基础。

2.2 节介绍了铁路轨道几何状态主要参数的定义和轨道不平顺参数的评估指标。2.3 节从轨道几何状态参数的定义出发归纳了轨道几何状态测量的本质内容；提出了采用 A-INS 组合导航技术实现铁路轨道几何状态快速精密测量的基本原理；对 A-INS 轨道几何状态测量的主要误差源进行了分类。2.4 节主要介绍惯性导航基本原理，重点是惯性传感器误差分类、惯性导航算法和惯性导航误差微分方程，作为后续建立 A-INS 测量误差传播模型的基础。2.5 节主要介绍 A-INS 组合导航算法，构建了松组合间接卡尔曼滤波的状态方程和多种辅助信息的观测方程，作为 A-INS 轨检小车数据融合的具体实现方式，后续的误差传播模型研究也是基于该组合导航算法而开展的。

### 2.2 铁路轨道几何状态

轨道几何状态指的是轨道几何形位 (track geometry)，主要有轨向、高低、轨距、超高、水平和三角坑，也即轨道静态检测指标。

铁路修建的一个重要问题是保证轨道几何形位。每一根钢轨均有两个自由度，并且两根钢轨组成的轨道可由超高、水平、轨向和轨距四自由度等效系统来描述。另一重要参数是三角坑，即在某一特定长度范围内的水平差。所有变量均为纵向里程的函数 (Esveld 2001)。

#### 2.2.1 轨道几何参数

轨道不平顺测量和轨道精调所关心的轨道内部几何状态参数主要包括：轨距、超高/水平、轨向不平顺和高低不平顺等。

##### 2.2.1.1 轨距

轨距定义为左右两股钢轨头部内侧轨顶面下 16 mm (不同类型的钢轨定义可能有所差异) 处作用边之间的最小距离，其中我国高铁轨道采用的标准轨距是 1435 mm (陈文 2015)。实际轨距与标准轨距之差被称作轨距偏差，相应还有轨距递变率等概念，指的是轨距随里程的变化率。轨距的测量属于绝对测量的范畴，可采用接触式系统 (如机械式轨距尺) 或非接触式系统 (如激光测距系统) 进行测量 (Institution 2008)。

### 2.2.1.2 超高

超高是指同一里程断面上左、右轨顶面相对于所在参考水平面的设计高差，实际高差减去设计超高之后的差值则称作水平。水平属于绝对测量的范畴，可通过测量对应的倾角  $\theta$  得到，如图 2-1， $\theta$  可由惯导或倾角传感器测量。注意在用倾角反算水平或超高时，标准 1435 mm 轨距对应的斜边长度  $L$  为 1500 mm。超高与倾角  $\theta$  的关系式为：

$$cant = L \sin \theta \quad (2.1)$$

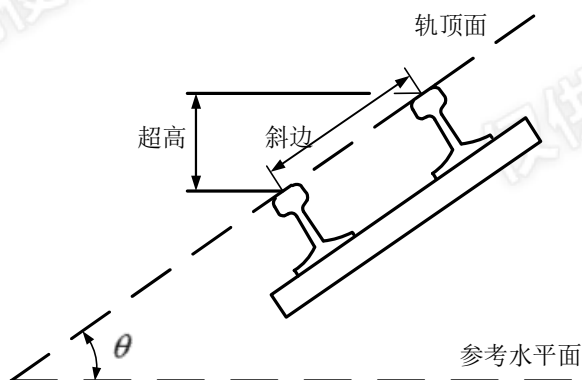


图 2-1 轨道超高示意图

### 2.2.1.3 轨向不平顺

轨道轨向不平顺（也称方向不平顺）指轨头内侧面沿长度方向的横向凹凸不平顺，如图 2-2 所示。它包括轨道中心线偏差、轨排横向不均匀残余变形积累、轨头侧面不均匀磨损、轨道横向弹性不一致等形成的横向不平顺(罗林, 张格明 et al. 2006)。左、右两股钢轨方向的变化往往不同，尤其在木枕和扣件薄弱的曲线区段差异更大，一般需要区分左轨方向不平顺和右轨方向不平顺，并将左、右轨方向不平顺的平均值作为轨道的中心线方向偏差。轨向不平顺会造成轨道中线方位角偏离其设计值，使车轮产生横向运动，主要引起机车车辆的左右摆动。

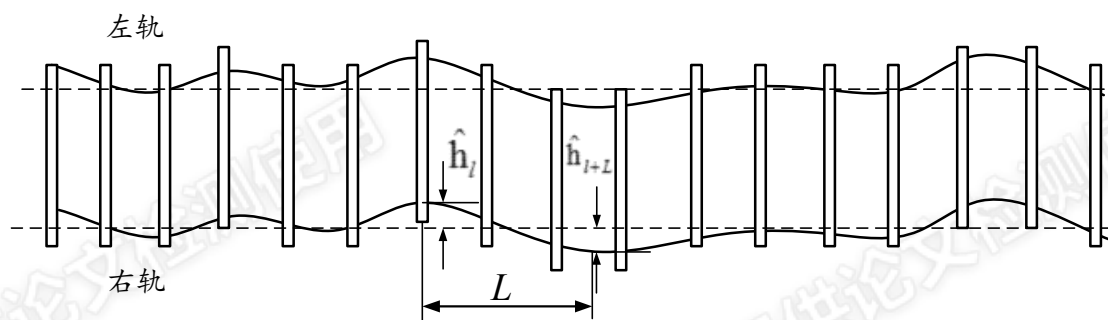


图 2-2 轨道轨向不平顺（变形）示意图(罗林, 张格明 et al. 2006)

### 2.2.1.4 高低不平顺

轨道高低不平顺（又称轨道垂向不平顺），是指沿着钢轨的长度方向在垂直方向上

的凹凸不平(罗林, 张格明 et al. 2006), 如图 2-3 所示。轨道高低不平顺激起车辆的垂向振动, 并能在轮轨间产生很大的垂向作用力, 并进一步加剧轨道垂向变形。左右两根钢轨高低起伏变化趋势虽然有时比较一致, 但各自变化并不相同, 所以还必须区分左、右轨高低不平顺(罗林, 张格明 et al. 2006)。

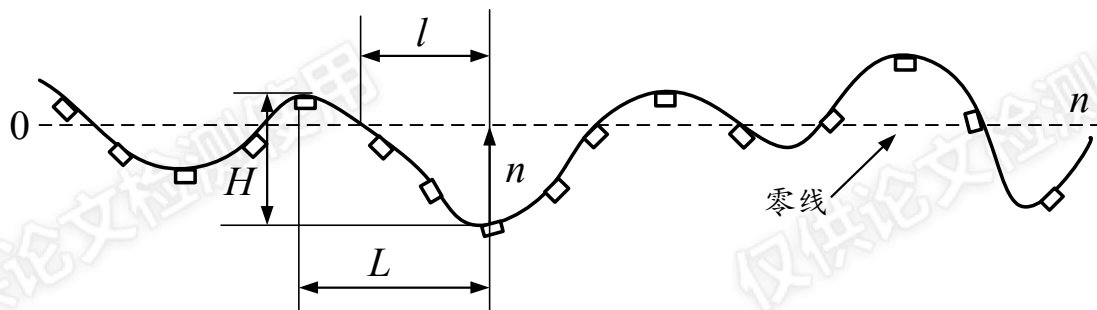


图 2-3 轨道高低不平顺(变形)示意图(罗林, 张格明 et al. 2006)

### 2.2.2 轨道不平顺评估指标

目前规范规定采用“定弦检测法”来检测和评估轨道轨向和高低不平顺(科技基[2008]86号 2008)。具体采用 30 m 弦和 300 m 弦检测短波和长波不平顺; 下面以 30 m 弦为例阐述具体的计算方法:

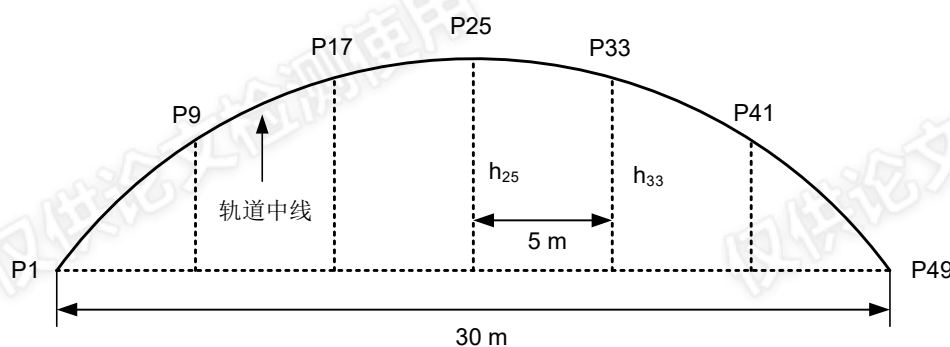


图 2-4 30 m 弦轨道不平顺检测示意图(科技基[2008]86号 2008)

如图 2-4 所示, 假定钢轨支承点的间距为 0.625m, 采用 30 m 弦线, 按间距 5 m 设置一对检测点, 则支承点的 8 倍正好是两检测点的间距 5m。30 m 弦短波不平顺检测示意图如图 2-4 所示, 图中的点是钢轨支承点的编号, 以 P<sub>1</sub> 到 P<sub>49</sub> 表示。30 m 弦短波不平顺检测指标/参数为:

$$\Delta V = \left| (V_{real,25} - V_{real,33}) - (V_{design,25} - V_{design,33}) \right| \quad (2.2)$$

式中  $V_{design,25}$ ,  $V_{design,33}$  为点 P<sub>25</sub>, P<sub>33</sub> 点到设计弦线 P<sub>1</sub>P<sub>49</sub> 上距离的设计值, 也称作设计正矢或设计矢高。 $V_{real,25}$ ,  $V_{real,33}$  为相应的实际正矢。P<sub>25</sub> 为检核点, P<sub>33</sub> 为核算点, 二者构成检核点对, 轨道不平顺值  $\Delta V$  归算到检核点里程上。图中所示的弦线并不真实存在, 实测正矢对应的弦线为 P<sub>1</sub>, P<sub>49</sub> 的实测点连线。实际正矢由实测平面坐标和高程向对应的弦线投影得到。当轨道发生变形或偏离设计线型时, 实际正矢与设计正矢不相等, 此时  $\Delta V$  不等于零, 其阈值见表 2-1。当  $\Delta V$  大于对应的阈值时, 称该里程点不平顺超限,

需要对轨道进行调整。轨道短波轨向不平顺和高低不平顺均采用这一方法进行检测和评估, 300 m 弦长波不平顺参数的计算方法类似, 具体可参考(科技基[2008]86 号 2008, 陈文 2015)。

## 2.3 A-INS 轨道几何状态测量基本原理

### 2.3.1 轨道几何状态测量的本质

钢轨本质上可看作一条三维空间曲线, 其几何形状可用平面坐标和高程来描述。实际轨道由于存在变形(也即轨道不平顺), 其位置坐标和姿态角等几何量也将偏离其设计值。因此, 轨道变形改变了轨道各里程点之间的相对几何关系, 包括位置相对关系和姿态相对关系, 如图 2-5 所示。

单股钢轨的几何状态测量本质上是一种相对测量。从轨道平顺性参数的计算也可以看出, 其本质上评估的是检核点对之间相对位置关系。以直线段轨向不平顺为例(如图 2-2 所示)说明如下: 由于直线段设计正矢(横向矢高)为零, 轨向不平顺参数等于检核点之间的实际正矢之差, 而正矢可根据钢轨的坐标计算得到。因此, 轨道不平顺本质上评估的是检核点间的相对平面位置关系。同理, 高低不平顺测量本质上要求测量检核点的相对高程。

两股钢轨之间的相对关系则主要通过水平和轨距来描述, 这两个参数的测量相对独立, 且属于绝对测量范畴。

钢轨的三维位置坐标结合轨距和水平则可以描述整个轨道系统的几何状态。轨道几何状态测量本质上是两股钢轨的定位、定姿问题。

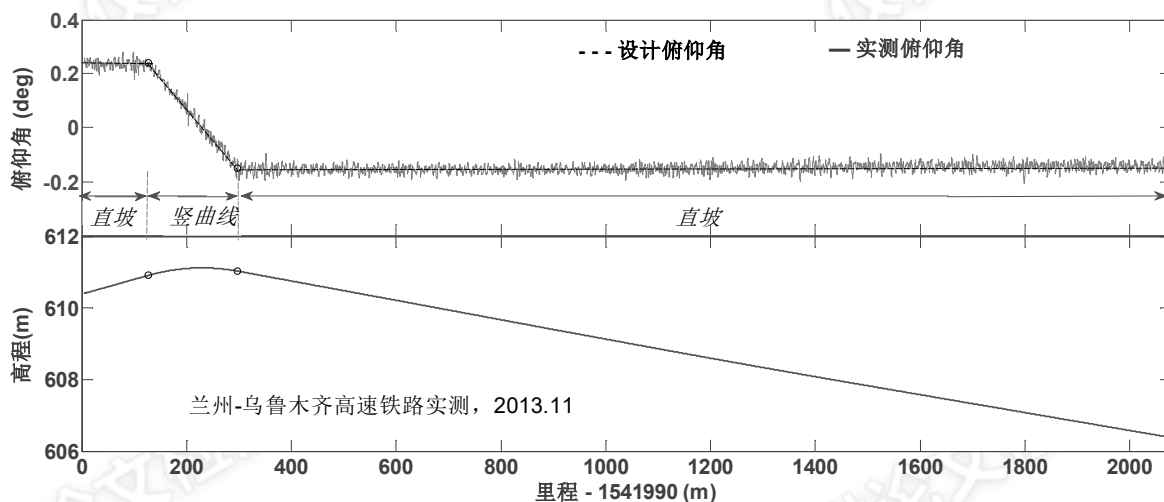


图 2-5 轨道几何变形/不平顺导致轨道的位置坐标和姿态在设计值附近扰动

### 2.3.2 A-INS 轨检小车测量原理

下面先简要介绍采用 A-INS 组合导航技术来解决轨道定位、定姿问题, 实现轨道几何状态的快速精密测量的基本原理。

惯性导航系统 (Inertial Navigation System, INS) 是利用加速度计和陀螺仪提供的惯性量测信息, 经过投影和积分运算, 得到运载体的速度、位置和姿态等信息。惯性导航系统的优点是: 不需要任何外来信息也不向外辐射任何信息, 可在任何环境介质和任何环境条件下实现导航, 且能输出运载体的位置、速度和姿态等多种导航信息, 系统的频带宽, 能跟踪运载体的任何机动运动, 导航输出数据平稳, 极好的短期稳定性。但惯性导航系统也具有其固有的缺点: 导航精度随时间而发散, 即长期稳定性差(秦永元, 张洪钺 et al. 2015)。从本质上讲 INS 属于一种相对测量技术, 且惯性器件 (陀螺和加速度计) 拥有出色的相对测量能力。以陀螺为例, 假设一个典型的导航级激光惯导的量程为  $\pm 500 \text{ deg/s}$ , 精度为  $0.01 \text{ deg/h}$ , 则其最大相对测量能力为  $1000 \text{ deg/s} \div 0.01 \text{ deg/h} = 3.6 \times 10^8$ ! 但是由于惯性导航运算需要经过积分运算, 测量误差会随时间积累, 以致测量精度随时间而下降, 因此惯导被认为是短期精度高, 而长期精度低。

抑制惯性导航独立工作时精度发散的一种有效方式是引入外部辅助信息反馈, 形成稳定的闭环组合导航系统(武元新 2005), 称之为带有辅助信息的惯性导航系统 (Aided Inertial Navigation System, A-INS)。A-INS 组合导航能够充分利用各子系统的优势, 实现优势互补。在较长时间内维持极高的相对测量精度, 实现精密测量。外部辅助信息的种类较多, 如全球导航卫星系统 (Global Navigation Satellite System, GNSS)、控制点、里程计等, 将在本文后续章节进行详细说明。

图 2-6 给出了基于 A-INS 组合导航技术的轨道几何状态测量仪模型。A-INS 组合导航系统为非接触式测量手段, 需要搭载在特定的载体 (图中所示的小车车体) 上才能有效检测轨道的几何状态: A-INS 与小车车体刚性固联, 小车的行走轮与钢轨始终保持刚性接触, 保证小车的轨迹线能够真实有效地反映实际轨道几何形状。当小车车架在铁路轨道上运动时, 轨道变形会引起小车车架运动状态的变化。这种变化即使很微弱也能被与小车固联的 A-INS 系统感知和测量出来。搭载 A-INS 的运动平台 (小车车架) 的几个车轮犹如 A-INS 的几个触角, 用于传递轨道不平顺信号。A-INS 解算得到载体的三维位置坐标和姿态, 通过预先标定的各项杆臂值可推算出钢轨和轨道中线的三维位置坐标序列, 重建铁轨三维空间曲线。同时, 轨距偏差可通过安装在载体上的轨距传感器测量得到; 根据载体的横滚角测量值则可反算得到轨道的超高。

因此, A-INS 轨道几何状态测量系统的基本原理就是以 A-INS 组合导航系统为核心测量设备, 在动态条件下快速测量轨道的位置、姿态和轨距, 据此计算轨道变形量/偏差量、轨道不平顺及其发生的位置等各项几何参数。为精确测量轨道变形发生的位置, 要求 A-INS 组合导航应该具有厘米级的绝对位置精度, 进行里程定位。

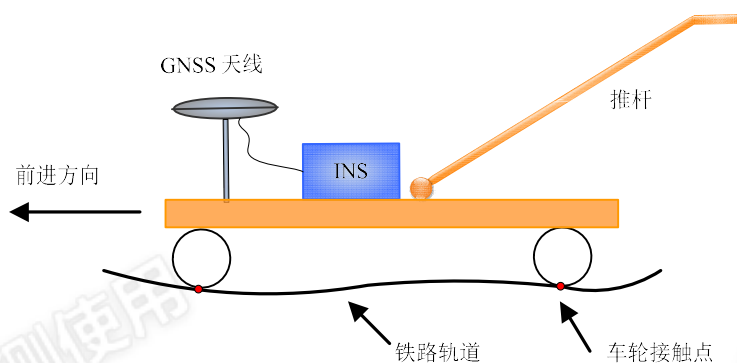


图 2-6 A-INS 高铁轨道几何形状测量系统示意图

### 2.3.3 A-INS 轨检小车的测量误差

#### 2.3.3.1 主要误差源

A-INS 轨检小车以小车车体为载体，用于搭载和集成各类测量传感器。A-INS 轨检小车的轨道测量误差分为机械类误差和测量类误差，如图 2-7 所示。其中机械类误差主要指由小车车体及设备安装所引入的误差；测量类误差主要是传感器及其组合的测量误差。下面对这些误差源的特性及误差处理方法进行介绍。

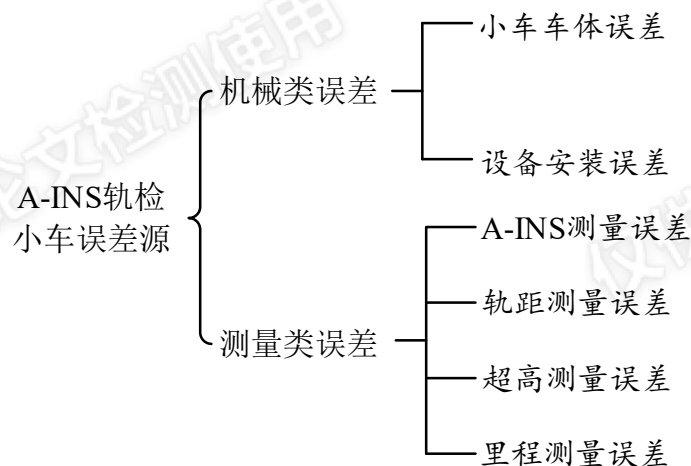


图 2-7 A-INS 轨检小车误差源

**小车车体误差：**具体又可以细分为静态误差和动态误差。其中静态误差主要是小车的机械加工误差和设备磨损所致，属于系统性误差，可以通过定期检核计量进行标定和补偿。动态误差则主要指在动态测量过程中才表现出来的小车车体误差。小车车体不是理想的刚体，在运动过程中会发生微小的变形和受力扭曲；同时小车运动过程中可能出现行走轮与钢轨不密贴的情况也会引入测量误差。小车车体的动态误差既有系统性误差成分又有随机误差，只能通过精密的机械加工和定期检核来保障。一般的，经过精密机械加工以及定期的检核校正，残余的小车车体误差将远小于测量类误差，详见 5.2.1 节。

**设备安装误差：**主要指惯导的安装误差和传感器之间的尺寸参数误差。前者主要是

IMU 的安装误差角, 即  $b$  系与车体坐标系  $v$  系之间夹角, 属于系统性误差, 可通过实验室标定或在线估计的方式对安装误差角进行估计和补偿, 详见 5.3.1.2 节。传感器之间的尺寸误差主要指杆臂误差, 属于系统性误差, 可以通过精密的测量手段进行测量和标定, 详见 5.2.1.2 节的讨论。标定之后的设备安装误差及其对最终精度的影响小于测量类误差。

**轨距测量误差:** 主要来自于轨距传感器的测量误差和小车车体的动态误差 (例如小车车轮与钢轨侧向不密贴)。后者通过精密的机械加工来保障, 对轨距测量的影响应小于轨距传感器误差。轨距传感器的测量误差包含系统性误差成分和随机误差。其中系统性误差可以通过简易的轨距标校台进行标定和精确补偿; 对轨距测量值中的随机误差成份则主要是降噪处理。使用质量好的轨距传感器能够保证优于 0.3 mm 的轨距测量精度。轨距测量误差主要影响非导向轨的轨向误差, 如轨向偏差量和轨向不平顺, 但轨距的测量比较独立, 与惯导无关。

**超高测量误差:** 超高或水平可通过 A-INS 的横滚角 (又称横向倾斜角) 推算得到, 属于 A-INS 测量误差中的一种。超高测量误差也包含系统性误差和随机误差。其中系统性误差可以通过特定的检校台进行标定和补偿。超高的随机测量误差取决于惯导的加速度计精度; A-INS 轨检小车能很容易地实现高精度的超高/水平测量, 例如战术级惯导也能实现 0.2 mm 的超高测量精度, 如 3.4.3 所述。

**里程测量误差:** 主要来自于里程计测量误差和 A-INS 绝对位置对里程的修正误差。一般的, A-INS 轨检小车的里程误差不会大于 5 cm, 这对于轨道几何参数的里程定位来说已经足够精确了。

**A-INS 测量误差:** 指导航结果的误差, 包括位置、速度和姿态误差。铁路轨道精密测量主要关注的是位置和姿态误差。A-INS 测量误差包含系统性误差和随机误差。其中系统性误差主要来自于小车尺寸参数误差, IMU 安装误差和辅助信息的系统性误差, 例如 GNSS 基站坐标误差。系统性误差可以通过标定和在线估计的方法进行计算和补偿。A-INS 测量误差的随机成份是一个随机过程, 从根本上决定了 A-INS 轨检小车的最终测量精度。因此, A-INS 轨检小车测量误差分析和精度评估的核心在于研究 A-INS 组合导航系统的随机误差; 前提是建立 A-INS 测量误差传播的理论模型, 基于该模型对最终的轨道测量误差做定量分析。这是本文理论工作的重点, 详见第 3 章。

### 2.3.3.2 A-INS 轨道几何状态测量的主要挑战

本文所述的 A-INS 方法是用坐标法描述钢轨的几何形状。如前所述轨距和超高的测量相对独立, 容易实现, 而最大的挑战在于轨向和高低的变形检测及对应的不平顺评估。

如果采用坐标法描述轨道几何状态, 要在 30 m 弦长范围内检测出 2 mm 的轨道不

平顺，则要求坐标测量误差不大于 1 mm（限差的 1/2，如表 2-1）。这一精度对于高精度全站仪在静止条件下测量也是一个很大的挑战。以 GNSS/INS 组合导航为例，整个系统的绝对精度取决于 GNSS，在动态条件下即使是短基线基于载波相位的差分定位也只能实现厘米级的位置精度。而 A-INS 轨道不平顺设计要在动态条件下实现亚毫米级的测量精度是整个方案面临的巨大挑战。

由于本文提出的 A-INS 轨道几何状态测量方案属于轻型便携式测量系统，其最高运行速度不大于 10 m/s，在铁路轨道上运行时其机动条件比较单一，在这种情况下，陀螺和加速度计的输出量信噪比较低，A-INS 组合导航精度更容易发散，尤其是航向角的可观测性差。要在如此低速和机动运动单调的情况下保持高精度测量，即使对于高精度的 A-INS 组合导航系统（例如导航级）来说也是一个巨大挑战。

表 2-1 高铁轨道长弦测量作业验收容许偏差管理值

项目	基线长 (m)	检核点对间距 (m)	容许偏差 (mm)
高低/轨向不平顺	300	150	10
	30	5	2

## 2.4 惯性导航技术基础

惯性导航技术是 A-INS 轨道几何状态测量研究的基础，下面介绍惯性导航的基础知识，包括常用坐标系、常用的姿态表达式、惯性传感器误差，然后介绍惯性导航算法和惯性导航误差方程。

### 2.4.1 常用坐标系及转换

对一切运动的描述都是相对于某个参考系而言的。惯性导航是一个多坐标系问题，需要精确定义一系列坐标系及不同坐标系之间的转换关系(Britting 2010, Groves 2013)。本文用到的坐标系有地心惯性坐标系、地心地固坐标系、导航坐标系、传感器坐标系、车体坐标系、平台坐标系和轨道测量所用的 Frenet 坐标系。

#### 2.4.1.1 地心惯性坐标系 ( $i$ 系)

惯性坐标系是指在空间保持静止或做匀速直线运动的坐标系(孔祥元, 郭际明 et al. 2005)。所有惯性传感器的测量值都是相对于惯性坐标系而言的。本文所讨论的惯性导航关心的是地球附近的运动，所以选取地心惯性坐标系，简称为  $i$  系，如图 2-8 所示，定义如下(袁信 and 郑谔 1985):

- a. 原点位于地球的质心
- b.  $z$  轴沿地球自转轴方向，从地心指向北极点（协议地极）
- c.  $x$  轴在赤道平面内，从地心指向春分点
- d.  $y$  轴与  $x$ 、 $z$  轴构成右手坐标系



严格地讲，这并不是一个真正的惯性坐标系，但实际上对于地面附近的导航应用来说，地心惯性坐标系是惯性坐标系的一种足够精确的近似(Groves 2013)。

#### 2.4.1.2 地心地固坐标系 ( $e$ 系)

地心地固坐标系与地心惯性坐标系的原点及  $z$  轴定义一致，但是地心地固坐标系随着地球一起转动（即与地球固联），地心地固坐标系相对于地心惯性坐标系的运动就是地球自转。本文将地心地固坐标系简称为  $e$  系，如图 2-8 所示，定义如下(袁信 and 郑谔 1985):

- a. 原点位于地球的质心
- b.  $z$  轴沿地球自转方向，从地心指向北极点（协议地极）
- c.  $x$  轴指向赤道与参考子午线（如 Greenwich 子午线）的交点
- d.  $y$  轴位于赤道平面，与  $x$ 、 $z$  轴构成右手坐标系

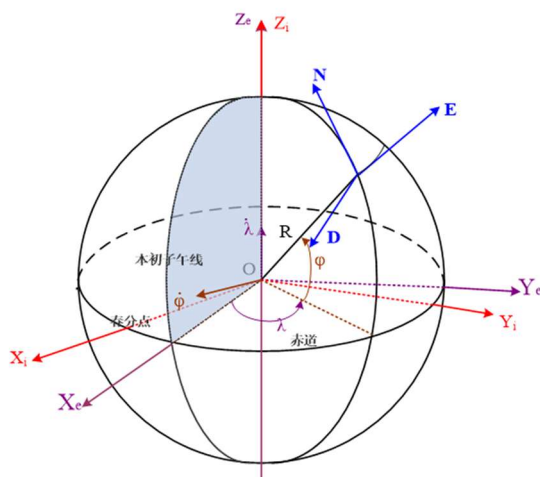


图 2-8 地心惯性坐标系与地心地固坐标系(班亚龙 2016)

地球自转（ $e$  系相对于  $i$  系的旋转）角速度向量，在  $e$  系下的投影表达式为：

$$\omega_{ie}^e = [0 \quad 0 \quad \omega_e]^T \quad (2.3)$$

其中  $\omega_e$  表示地球自转角速度值，等于  $7.2921158 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

#### 2.4.1.3 导航坐标系 ( $n$ 系)

本文选取北东地（NED）形式的当地地理水平坐标系作为导航坐标系，用符号  $n$  表示，如图 2-8 所示，定义如下：

- a. 原点为导航对象上的参考点（如导航系统或载体质心）
- b.  $z$  轴沿着参考椭球的法线方向，大致指向地心
- c.  $x$  轴在垂直于  $z$  轴的平面内，沿子午线方向指向北极
- d.  $y$  轴指向东方向，与  $x$ 、 $z$  轴构成右手坐标系

本文采用简单的重力模型，假定重力矢量的方向与导航坐标系的  $z$  轴重合，这可以

简化诸如  $\omega_{ie}^n$  和  $\omega_{en}^n$  等的表达。实际上由于局部重力异常的存在，真实重力矢量方向与  $z$  轴之间存在一定角度偏差(Groves 2013)。由于在地球两极处无法定义北向与东向，导航坐标系的一个主要缺点是在地球两极存在歧义。

导航坐标系相对于地球坐标系旋转的方向余弦矩阵及对应的四元数可分别用大地经纬度表示如下(Shin 2005):

$$\mathbf{C}_n^e = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q}_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

地球自转角速度向量在  $n$  系下的投影表达式为:

$$\omega_{ie}^n = \mathbf{C}_n^e \omega_{ie}^e = [\omega_e \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin \varphi]^T \quad (2.6)$$

$n$  系相对于  $e$  的旋转角速度向量在  $n$  系下的投影表达式为:

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_N + h} & \frac{-v_N}{R_M + h} & \frac{-v_E \tan \varphi}{R_N + h} \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

式中,  $h$  为大地高(椭球高);  $v_E, v_N$  为东向和北向速度值;  $R_M, R_N$  分别为子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径(孔祥元, 郭际明 et al. 2005)。

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (2.8)$$

$$R_N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (2.9)$$

式中  $a$  为地球参考椭球的长半轴半径,  $e$  为椭球扁率,  $\varphi$  为计算点的纬度。

#### 2.4.1.4 传感器坐标系 ( $b$ 系)

$b$  系 (body frame) 是指捷联惯性传感器 (加速度计和陀螺仪) 坐标系, 坐标原点位于惯性测量单元 (IMU) 的测量中心, 各轴平行于右手正交的传感器输出轴(Savage 2000)。捷联加速度计和陀螺仪所测比力及角速度分解在  $b$  系中(Shin 2005)。一般情况下, 可以认为传感器坐标系与车体坐标系 (如车辆坐标系) 的坐标轴指向一致, 但是本文为了对非完整性约束讨论的方便, 明确区分传感器坐标系与车体坐标系。

#### 2.4.1.5 车体坐标系 ( $v$ 系)

车体坐标系又称车辆坐标系, 代表了导航中要解算的导航对象的原点和姿态。车体

坐标系的原点通常与导航坐标系重合，但坐标轴却与载体固联(Groves 2013)。以轨检小车车体为例，如图 2-9 所示，将车体坐标系简称为  $v$  系 (vehicle frame)：

- a. 原点通常与载体的中心一致（这可以简化运动方程的推导）
- b.  $x$  轴指向载体的前向（轨检小车前进方向），也称横滚轴
- c.  $y$  轴指向右方，也称俯仰轴
- d.  $z$  轴与  $x$ 、 $y$  轴构成右手坐标系，指向地向（即向下方向），也称航向轴

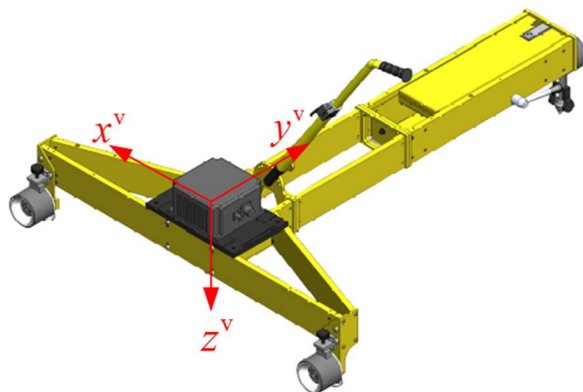


图 2-9 车体坐标系的坐标轴

#### 2.4.1.6 平台坐标系 ( $p$ 系)

为了便于分析惯性导航系统的姿态误差，常需引入平台坐标系 ( $p$  系)。导航坐标系是一个随着载体的运动而变化的一个坐标系。根据  $n$  系的定义可知，只要把它原点定下来，这个坐标系也就确定了。对于地球表面附近任意一点  $r$ （该点的位置向量）存在一个对应的导航坐标系，我们把它叫做真导航坐标系（真  $n$  系）(关肇直, 王恩平 et al. 1984)。

理想的捷联惯性导航系统能够计算出  $b$  系与真  $n$  系之间的姿态关系（例如表示为姿态矩阵或三个欧拉角），也即建立捷联惯导系统的理想数学平台。但由于系统存在着各种误差源的干扰，由惯性导航结果推算出来的载体真实位置所对应的导航坐标系也存在误差，不可能严格地与相应的真导航坐标系重合，如图 2-10 所示。为了区分这两个坐标系，我们把根据惯性导航结果（包括姿态和位置）推算出来的这一数学坐标系叫作平台坐标系，简称为  $p$  系。定义如下：

- a. 原点为惯性导航系统解算得到的载体的位置  $\hat{r}$ ，由于惯性导航解算存在误差，计算的载体位置与真实的载体位置  $r$  并不重合。
- b.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  坐标轴的指向：根据载体初始姿态和惯性导航解算的载体姿态推算出的北向、东向和垂向定义为  $p$  系的  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴的指向；由于解算的姿态存在误差，推算的  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴的方向与真实载体位置  $r$  对应的真导航坐标轴之间存在夹角。

平台坐标系 ( $p$  系) 与真  $n$  系之间存在一个旋转矢量  $\phi_{np}$  的变换，即真  $n$  系根据  $\phi_{np}$

转动后与  $p$  系重合。 $p$  系与真  $n$  系之间的姿态差异主要是由惯性导航系统的姿态解算误差带来的。对于高精度导航应用来说，可以认为二者之间的差异为小角度差异。 $\phi_{np}$  也常被用来定义惯性导航系统的姿态误差，对应的误差模型称作 Phi 角误差模型(Benson 1975, Shin 2005)。

$$\phi_{np} = [\phi_{roll} \quad \phi_{pitch} \quad \phi_{yaw}]^T \quad (2.10)$$

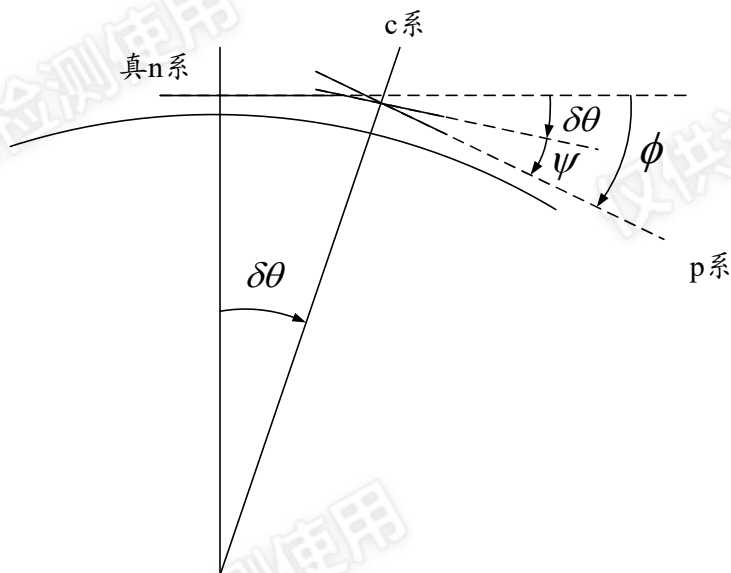


图 2-10  $p$  系与  $n$  系之间的相对关系(Shin 2005)

根据以上平台坐标系的定义可知， $b$  系与  $n$  系之间的方向余弦矩阵估值等于  $b$  系与  $p$  系之间的方向余弦矩阵，即

$$\hat{C}_b^n = C_b^p = C_n^p C_b^n \quad (2.11)$$

式中  $\hat{C}_b^n$  表示估值， $C_b^n$  表示真值。根据小角度假设，真  $n$  系到  $p$  系的方向余弦矩阵可表示为：

$$C_n^p = \mathbf{I} - (\phi_{np} \times) \quad (2.12)$$

式中  $(\phi_{np} \times)$  表示向量  $\phi_{np}$  对应的反对称矩阵(Savage 1998)。图 2-10 中  $\delta\theta$ ,  $\psi$  的计算表达式可参考文献(Shin 2005)。

#### 2.4.1.7 Frenet 坐标系 (F 系)

在描述钢轨形状及轨道偏差量时，常用到 Frenet 坐标系 (简称  $F$  系)，如图 2-11 所示。该坐标系的原点和指向随里程变化。在轨道里程点  $l$  处， $x$  轴与轨道中心线相切，指向轨道大里程方向； $y$  轴和  $z$  轴在与  $x$  轴垂直的平面内， $y$  轴指向右侧， $z$  轴指下，形成右手系。

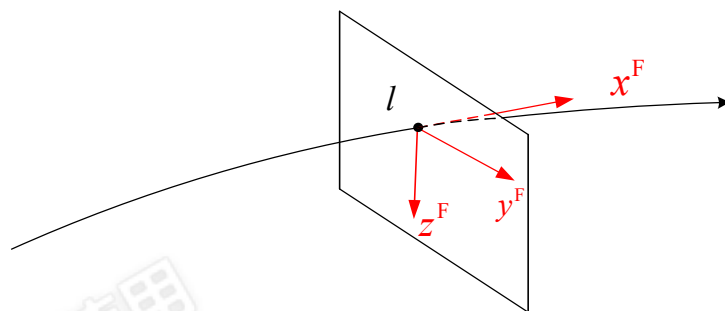


图 2-11 Frenet 坐标系

## 2.4.2 姿态表达式及转换

坐标系可以看作刚体，两个坐标系之间的角度相对关系可用姿态表达式来表示 (Savage 1998)。惯性导航常用的姿态表达式有欧拉角序列、方向余弦矩阵、等效旋转矢量和姿态四元数，下面简要介绍其主要特性，更多细节可参考文献(袁信 and 郑谔 1985, Savage 2000, Shin 2005, Groves 2013)。

### 2.4.2.1 欧拉角

欧拉角序列是一种用于描述两个坐标系之间相对姿态最直观的方法，尤其是用于描述传感器坐标系相对于当地导航坐标系的运动(Groves 2013)。对于惯性导航来说，一种常用的描述  $b$  系相对于导航坐标系 ( $n$  系) 姿态的欧拉角序列定义如下：1) 首先绕  $n$  系的  $z$  轴转动一个角度 (即航向角)；2) 接着绕过渡  $n$  系 (绕  $z$  轴转动后的  $n$  系) 的  $y$  轴转动一个角度 (即俯仰角)；3) 绕过渡  $n$  系 (绕  $z$  轴和  $y$  轴转动后的  $n$  系) 的  $x$  轴转动一个角度 (即横滚角)。

上述三个欧拉角 (航向角、俯仰角和横滚角) 唯一地确定了  $b$  系相对于  $n$  系的相对姿态。在轨道测量中轨检小车的航向角、俯仰角和横滚角能够比较直观地反映轨道的方位、高低和水平。值得注意的是，当俯仰角为  $\pm 90^\circ$  时，无法区分横滚角和航向角，欧拉角变换存在奇异值。

### 2.4.2.2 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵 (也称作坐标转换矩阵) 在捷联惯性导航系统分析中频繁地用于描述两个坐标系之间的相对姿态。其优势在于能够非常方便地对向量在两个坐标系之间进行投影变换(Savage 1998)。假设  $a_1, a_2, a_3$  为任意坐标系， $\mathbf{v}$  表示任意三维向量，则

$$\mathbf{v}^{a_1} = \mathbf{C}_{a_2}^{a_1} \mathbf{v}^{a_2}, \quad \mathbf{v}^{a_2} = \left( \mathbf{C}_{a_2}^{a_1} \right)^T \mathbf{v}^{a_1} = \mathbf{C}_{a_1}^{a_2} \mathbf{v}^{a_1} \quad (2.13)$$

从式(2.13)可以推导出方向余弦矩阵的连乘法则

$$\mathbf{C}_{a_1}^{a_3} = \mathbf{C}_{a_2}^{a_3} \mathbf{C}_{a_1}^{a_2} \quad (2.14)$$

### 2.4.2.3 等效旋转矢量(Savage 1998)

等效旋转矢量定义了转动的旋转轴（向量）及绕该轴转动的幅度。假设坐标系  $a_1$ 、 $a_2$  的原点重合， $a_1$  绕某一矢量（三维向量）进行旋转，且转动的角度等于该矢量的模，最终与坐标系  $a_2$  重合，则该矢量则为描述这一姿态变换的等效旋转矢量。为描述方便，将  $a_2$  称为坐标系  $a_1$  新姿态。任意一个等效旋转矢量都唯一地定义了  $a_2$  相对于  $a_1$  的姿态。反之，若已知坐标系  $a_2$  相对于坐标系  $a_1$  的姿态，则总可以找到一个与这一姿态对应的等效旋转矢量。所以，等效旋转矢量可用于定义坐标系  $a_2$  与坐标系  $a_1$  之间的相对姿态。用等效旋转矢量表示方向余弦矩阵的表达式为：

$$\mathbf{C}_{a_2}^{a_1} = \left[ \mathbf{I} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} (\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{(1 - \cos \|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} (\boldsymbol{\phi} \times)^2 \right] \quad (2.15)$$

式中  $\boldsymbol{\phi}$  表示将坐标系  $a_1$  旋转至与  $a_2$  重合所对应的一个等效旋转矢量， $\|\boldsymbol{\phi}\|$  为  $\boldsymbol{\phi}$  的模。等效旋转矢量的一个特性为：等效旋转矢量  $\boldsymbol{\phi}$  在  $a_1$  坐标系和  $a_2$  坐标系的各投影分量相等。因此式(2.15)中的  $\boldsymbol{\phi}$  不标注上标，可以是  $\boldsymbol{\phi}^{a_1}$  或  $\boldsymbol{\phi}^{a_2}$ 。

### 2.4.2.4 姿态四元数

姿态四元素是一个四维向量（即包含四个元素），可表示为等效旋转矢量的函数(Savage 1998)：

$$\mathbf{q}_{a_2}^{a_1} = \begin{bmatrix} \cos(0.5\|\boldsymbol{\phi}\|) \\ \frac{\sin(0.5\|\boldsymbol{\phi}\|)}{0.5\|\boldsymbol{\phi}\|} 0.5\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

式中的等效旋转矢量  $\boldsymbol{\phi}$  定义与式(2.15)同。从(2.16)容易验证姿态四元数  $\mathbf{q}_{a_2}^{a_1}$  的模为 1。用四元数  $\mathbf{q}_{a_2}^{a_1}$  表示的向量投影转换表达式为：

$$\mathbf{v}_q^{a_1} = \mathbf{q}_{a_2}^{a_1} \mathbf{v}_q^{a_2} (\mathbf{q}_{a_2}^{a_1})^*, \quad \mathbf{v}_q^{a_2} = \mathbf{q}_{a_1}^{a_2} \mathbf{v}_q^{a_1} (\mathbf{q}_{a_1}^{a_2})^* = (\mathbf{q}_{a_2}^{a_1})^* \mathbf{v}_q^{a_1} \mathbf{q}_{a_2}^{a_1} \quad (2.17)$$

式中，

$$\mathbf{v}_q^{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^{a_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_q^{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^{a_2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$\mathbf{v}$  为任意三维向量。式(2.17)可用于推导姿态四元数的连乘运算法则，在姿态更新中比较常用：

$$\mathbf{q}_{a_1}^{a_3} = \mathbf{q}_{a_2}^{a_3} \mathbf{q}_{a_1}^{a_2} \quad (2.19)$$

### 2.4.2.5 姿态表达式微分方程

方向余弦矩阵、等效旋转矢量的时间微分方程如下(Savage 1998)：

$$\dot{\mathbf{C}}_{a_2}^{a_1} = \mathbf{C}_{a_2}^{a_1} (\boldsymbol{\omega}_{a_2}^{a_2} \times) - (\boldsymbol{\omega}_{a_1}^{a_1} \times) \mathbf{C}_{a_2}^{a_1} \quad (2.20)$$

$$\dot{\phi} = \omega_{a_1 a_2}^{a_1} + \frac{1}{2} \phi \times \omega_{a_1 a_2}^{a_1} + \frac{1}{\|\phi\|^2} \left( 1 - \frac{\|\phi\| \sin\|\phi\|}{2(1 - \cos\|\phi\|)} \right) \phi \times (\phi \times \omega_{a_1 a_2}^{a_1}) \quad (2.21)$$

### 2.4.3 惯性传感器误差

惯性测量单元 (IMU) 是惯性导航系统的传感部件, 通常包含 3 个加速度计与 3 个单自由度陀螺, 安装在 3 个正交的敏感轴上, 本文讨论的惯性传感器与载体固联, 即捷联式惯性导航系统。其中加速度计用于测量载体相对于惯性空间的比力 (定义为载体相对于惯性空间的全加速度和引力加速度的矢量差), 陀螺用于测量载体相对于惯性空间的转动角速度。捷联式高精度 IMU 输出常采用离散增量形式, 即在采样周期内对比力和角速度积分(Shin 2005):

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^b = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b dt \quad (2.22)$$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b dt \quad (2.23)$$

式中  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^b$ ,  $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$  分别表示加速度计和陀螺在  $t_k$  时刻的速度增量和角度增量输出。

加速度计和陀螺的实际输出不可避免地存在误差, 主要包括: 零偏误差、比例因子误差、交轴耦合误差和随机噪声等。每一种系统性误差又包含常值项、随温度变化项、随机逐次上电启动项和工作期间变化项(Groves 2013)。对于传感器误差中的确定性误差成分 (如常值和随温度变化项) 可以通过实验室标定的方式进行补偿修正。真正决定惯性导航系统精度, 影响组合导航系统设计的是补偿了确定性误差之后的残余惯导误差项, 如逐次上电启动项、工作期间变化项和随机噪声等(Groves 2013)。

本文后面考虑的惯性传感器误差均指惯导残余误差项。经过标定补偿后的陀螺与加速度计输出的主要误差表示为:

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{b}_a + \mathbf{M}_a \mathbf{f} + \mathbf{w}_a \quad (2.24)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \mathbf{M}_g \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{w}_g \quad (2.25)$$

其中  $\delta \mathbf{f}$  与  $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  分别表示加速度计与陀螺误差;  $\mathbf{b}_a$ 、 $\mathbf{b}_g$  分别为加速度计零偏误差和陀螺零偏误差;  $\mathbf{w}_a$ 、 $\mathbf{w}_g$  表示随机噪声;  $\mathbf{M}$  表示比例因子误差  $\mathbf{s}$  与交轴耦合误差  $\mathbf{m}$  的组合, 对 IMU 的 3 轴加速度计和 3 轴陀螺来讲,  $\mathbf{M}$  可以表示为(Groves 2013):

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & s_{a,y} & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & s_{a,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} s_{g,x} & m_{g,xy} & m_{g,xz} \\ m_{g,yx} & s_{g,y} & m_{g,yz} \\ m_{g,zx} & m_{g,zy} & s_{g,z} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

### 2.4.4 捷联惯性导航机械编排

惯性导航从根本上说就是已知来自于加速度计的比力 (非引力加速度) 测量值, 在特定的坐标系 (比力测量值投影在该坐标系内, 且这个坐标系相对于惯性坐标系的指向

通过陀螺确定)内求解牛顿力学方程。对于地球附近的导航应用,在选定的导航解算参考坐标系  $r$  内的力学方程为(Benson 1975):

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_r + (\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{ir}) \times \mathbf{v}_e - \mathbf{g}_l = \mathbf{f} \quad (2.27)$$

其中  $\mathbf{v}_e$  为 IMU 相对于地球的速度(地速),后续研究的速度都是地速,将省略下标  $e$ ;  $\mathbf{f}$  为比力向量,  $\mathbf{g}_l$  为当地地球重力加速度,  $\boldsymbol{\omega}_{ie}$  为地球自转角速度,  $\boldsymbol{\omega}_{ir}$  为  $r$  系相对于惯性坐标系的旋转角速度。本文选择在  $n$  系下进行惯性导航解算,对应的导航微分方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^n \\ \dot{\mathbf{C}}_n^e \\ \dot{h} \\ \dot{\mathbf{C}}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l^n \\ \mathbf{C}_n^e (\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times) \\ -v_D \\ \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$  为  $n$  系相对于  $i$  系的旋转角速度在  $n$  系下的投影;  $v_D$  为  $n$  系下的垂向速度分量;  $\mathbf{g}_l^n$  为当地地球重力加速度在  $n$  系下的投影。

惯导机械编排的任务主要包括:积分角速度对载体的姿态进行更新;利用得到的姿态信息将加速度变换到合适的导航坐标系,然后进行积分得到载体的速度信息,完成速度更新;对速度进行积分完成载体的位置更新(武元新 2005),接下来将介绍惯性导航速度、位置和姿态的更新算法。

#### 2.4.4.1 速度更新

速度更新过程主要是积分全加速度得到当前速度,实现速度更新算法就是对地速微分方程进行数字积分和离散化处理(Savage 2000)。对速度微分方程(2.28)积分得到速度更新方程:

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}_l^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n \right] dt \quad (2.29)$$

式中  $\mathbf{v}_{k-1}^n$  为上一时刻  $t_{k-1}$  的惯导速度,  $\mathbf{v}_k^n$  为待求的当前时刻的惯导速度。定义以下积分式:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b dt \quad (2.30)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \mathbf{g}_l^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n \right] dt \quad (2.31)$$

则速度更新方程(2.29)可简写为:

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \quad (2.32)$$

其中,  $k$  为数字积分算法更新频率/周期索引,表示时刻  $t_k$ 。  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n$  为由比力引起的速度增量在导航坐标系下的投影,简称比力积分项。  $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n$  为由重力加速度和哥氏加速度



引起的速度增量在导航坐标系下的投影，简称重力/哥氏积分项。式(2.30)和(2.31)中，积分符号内的各被积分项均为时间  $t$  的函数。

重力/哥氏积分项中的被积函数在积分周期内变化缓慢，针对 A-INS 轨检小车的低速运动（运动速度不大于 5 m/s），该积分项可简化如下：

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n = \left[ \mathbf{g}_l^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n \right]_{t_{k-1/2}} \Delta t_k \quad (2.1-33)$$

式中  $t_{k-1/2}$  表示  $t_{k-1}$  和  $t_k$  的中间时刻， $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ； $\mathbf{g}_l^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$  的数值通过带入中间时刻的变量值进行计算。 $\mathbf{g}_l^n$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  是位置的函数， $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  是位置和速度函数。由于  $t_k$  的速度和位置尚未更新， $t_{k-1/2}$  时刻的位置和速度需根据前面历元外推得到，具体方法见参考文献(Savage 2000)。

比力积分项  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n$  是对一个时变向量进行积分，其数值运算需要考虑该向量在积分周期内方向的变化，对积分的不可交换性误差进行补偿。对于没有高频角振动的低速导航应用（如轨检小车）来说，可假设在相邻积分区间内角速度和比力随时间线性变化，对积分的旋转效应和划桨效应进行补偿(Savage 2000, 秦永元 2014)，得到速度更新的双子样算法：

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \left[ \mathbf{I} - (0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \times) \right] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (2.34)$$

式中，

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_k + \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_k + \Delta \mathbf{v}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k) \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} = (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n)_{t_{k-1/2}} \Delta t_k \quad (2.36)$$

其中， $\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_k$  为旋转效应补偿项， $\frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_k + \Delta \mathbf{v}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k)$  为划桨效应补偿项， $t_{k-1/2}$  表示  $t_{k-1}$  和  $t_k$  的中间时刻。

#### 2.4.4.2 位置更新

基于速度更新值直接进行位置更新的算法较为复杂，其思路和速度更新算法类似，具体可参考(Savage 2000, 秦永元 2014)。本文采用更新位置四元数的方法完成纬度和经度的位置更新，直接对垂向速度进行积分完成高程通道的更新。其中经纬度的更新算法如下：

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} \quad (2.37)$$

$\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)}$  和  $\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)}$  的表达形式如下：

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \left\| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \right\| \\ \frac{\sin \left\| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \right\|}{\left\| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \right\|} 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1),n(k)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{q}_{e^{(k-1)}}^{e^{(k)}} = \begin{bmatrix} \cos \left\| 0.5 \boldsymbol{\xi}_{e^{(k-1)}, e^{(k)}} \right\| \\ \frac{\sin \left\| 0.5 \boldsymbol{\xi}_{e^{(k-1)}, e^{(k)}} \right\|}{\left\| 0.5 \boldsymbol{\xi}_{e^{(k-1)}, e^{(k)}} \right\|} 0.5 \boldsymbol{\xi}_{e^{(k-1)}, e^{(k)}} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

其中,  $n$  系更新的等效旋转矢量  $\boldsymbol{\zeta}_{n^{(k-1)}, n^{(k)}}$  可参考(2.36);  $\boldsymbol{\xi}_{e^{(k-1)}, e^{(k)}} = \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \Delta t_k$ , 表示相邻历元间的  $e$  系对应的旋转矢量。由于速度已经完成更新, 可以通过内插的方式来计算所需的中间时刻速度。纬度和经度可从  $\mathbf{q}_n^e$  中解析获得(Shin 2005)。高程通道的更新则单独通过对垂向速度积分完成:

$$h_k = h_{k-1} - v_{D, k-1/2} \Delta t_k \quad (2.40)$$

#### 2.4.4.3 姿态更新

采用更新姿态四元数的方法来完成姿态的更新, 如下:

$$\mathbf{q}_{b^{(k)}}^{n^{(k-1)}} = \mathbf{q}_{b^{(k-1)}}^{n^{(k-1)}} \mathbf{q}_{b^{(k)}}^{b^{(k-1)}} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{q}_{b^{(k)}}^{n^{(k)}} = \mathbf{q}_{n^{(k-1)}}^{n^{(k)}} \mathbf{q}_{b^{(k)}}^{n^{(k-1)}} \quad (2.42)$$

其中,  $b$  系的更新四元数为

$$\mathbf{q}_{b^{(k)}}^{b^{(k-1)}} = \begin{bmatrix} \cos \left\| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \right\| \\ \frac{\sin \left\| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \right\|}{\left\| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \right\|} 0.5 \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

其中  $\boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}}$  表示将  $t_{k-1}$  时刻的  $b$  系转动到  $t_k$  时刻的  $b$  系所对应的等效旋转矢量。参考式(2.21), 等效旋转矢量  $\boldsymbol{\phi}$  的微分方程在工程中常简化如下(Bortz Sr 1970, 秦永元 2014):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{12} \boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \times (\boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \\ &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (2.44)$$

根据比力和角速度的双子样假设, 对(2.44)积分可得(Miller 1983, Savage 2000, Shin 2005):

$$\boldsymbol{\phi}_{b^{(k-1)}b^{(k)}} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \right] dt \approx \Delta \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \quad (2.45)$$

其中,  $\frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k$  为二阶圆锥误差项, 角增量  $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$  的定义参考(2.23)。  $n$

系的更新四元数为:

$$\mathbf{q}_{n(k-l)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}\| \\ \sin \|0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}\| \\ -\frac{\|0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}\|}{\|0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}\|} 0.5\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

式中  $\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}$  的含义及计算式参考(2.36)，由于位置已经完成更新，中间位置可通过内插求解， $\boldsymbol{\zeta}_{n(k-l),n(k)}$  需要根据内插位置进行重新计算。高程方向采用简单的线性内插： $h_{k-1/2} = (h_{k-1} + h_k)/2$ ；而中间时刻的经纬度分量则采用内插等效旋转矢量的方法(Groves 2013)来获得：

$t_{k-1}$  到  $t_k$  的位置变化四元数为：

$$\mathbf{q}_{\delta\theta} = \left(\mathbf{q}_{n(k-l)}^{e(k-l)}\right)^{-1} \mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)} \quad (2.47)$$

式中  $\left(\mathbf{q}_{n(k-l)}^{e(k-l)}\right)^{-1}$  表示四元数  $\mathbf{q}_{n(k-l)}^{e(k-l)}$  的求逆运算(Shin 2005)，由  $\mathbf{q}_{\delta\theta}$  解算对应的旋转矢量  $\delta\theta$ ；取该旋转矢量的一半  $0.5\delta\theta$ ，计算对应的四元数  $\mathbf{q}_{0.5\delta\theta}$ ；然后计算中间时刻的位置四元数：

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \mathbf{q}_{0.5\delta\theta} \quad (2.48)$$

从位置四元数  $\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)}$  中可以解析出中间时刻的纬度和经度，参考式(2.5)。

由于计算误差等因素的影响，计算过程中  $\mathbf{q}_b^n$  会逐渐失去归一化特性，即四元数的模不等于 1。因此，在若干次更新后需要对  $\mathbf{q}_b^n$  进行归一化处理，如下：

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

式中  $\hat{q}_i, q_i$  分别表示归一化处理之前和之后四元数的第  $i$  个元素。

## 2.4.5 惯性导航误差方程

受惯性传感器误差、重力误差、初始导航状态误差和计算误差等因素的影响，惯性导航机械编排得到的导航参数带有误差（导航误差）。INS 导航误差随时间的变化用一组微分方程来表示，即惯导误差微分方程。目前已有多种形式的微分方程可用来描述惯导误差随时间的变化规律，可根据不同的应用选用不同的惯性导航误差模型。其中，误差扰动分析是一种经典的 INS 误差分析方法，该方法将实际导航参数在其真值（真 n 系）附近进行泰勒展开，保留至一阶误差项，得到 INS 误差微分方程（称作 Phi 角误差模型(Titterton and Weston 2004)）。下面给出 Phi 角误差模型的姿态、速度和位置微分方程，作为后续 A-INS 误差传递分析的基础。

### 2.4.5.1 常用变量的误差表达式

惯性导航误差分析的基本误差量定义如下：

$$\delta \mathbf{r}^n \equiv [\delta r_N \quad \delta r_E \quad \delta r_D]^T \quad (2.50)$$

$$\delta \mathbf{v}^n \equiv [\delta v_N \quad \delta v_E \quad \delta v_D]^T \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_{roll} \quad \phi_{pitch} \quad \phi_{yaw}]^T \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \delta \mathbf{f}^b \quad (2.53)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2.54)$$

式中  $\delta$  表示变量的误差。 $\delta \mathbf{r}^n$  的三个分量分别表示北东地三个方向上的位置误差，对于北东地形式的  $n$  系有  $\delta \mathbf{r}_D = -\delta \mathbf{h}$ ； $\delta \mathbf{v}^n$  的三个分量分别表示北东地三个方向上的速度误差。 $\boldsymbol{\phi}$  为姿态角误差，定义为由真  $n$  系转动至  $p$  系的三个欧拉角，因此这一误差模型又被称为 Phi 角误差模型。其中  $\phi_{roll}$ ， $\phi_{pitch}$  表示水平误差或倾斜角误差， $\phi_{yaw}$  表示绕垂直方向的误差，即航向角或方位角误差。这些误差类似于仪表组在稳定平台导航系统的物理偏差，并且对于小失准角来讲，近似等于横滚、俯仰和航向的欧拉角误差(Titterton and Weston 2004)。 $\delta \mathbf{f}^b$  和  $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  分别表示加速度计比力和陀螺角速率输出误差向量，即传感器误差。

定义以下中间变量的扰动误差如下：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (2.55)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n = \boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n \quad (2.56)$$

$$\hat{\mathbf{g}}_l^n = \mathbf{g}_l^n + \delta \mathbf{g}_l^n \quad (2.57)$$

$\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  表示地球自转角速度向量在  $n$  系下的投影误差。 $\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n$  与 INS 位置误差、速度误差和投影误差均相关。 $\delta \mathbf{g}_l^n$  表示重力计算值的综合误差。这些中间变量的误差均可表示为基本误差量的函数。

#### 2.4.5.2 姿态误差微分方程

根据上述姿态角误差定义有：

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^p = \mathbf{C}_n^p \mathbf{C}_b^n = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \quad (2.58)$$

根据式(2.28)知姿态转换矩阵的微分表达式为：

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \quad (2.59)$$

式(2.58)两边对时间求导，对式(2.59)进行误差扰动；令上述两式得到的  $\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n$  的表达式相等，略去误差的二阶项，整理得到姿态角误差微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2.60)$$

将式(2.60)各分量展开，可得：

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{roll} = & -\frac{\omega_e \sin \varphi}{R_M + h} \delta r_N + \frac{v_E}{(R_N + h)^2} \delta r_D + \frac{1}{R_N + h} \delta v_E - \left( \omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h} \right) \phi_{pitch} \\ & + \frac{v_N}{R_M + h} \phi_{yaw} - \delta \omega_{ib,N}^n \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{pitch} = & -\frac{v_N}{(R_M+h)^2} \delta r_D - \frac{1}{R_M+h} \delta v_N + \left( \omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N+h} \right) \phi_{roll} \\ & + \left( \omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N+h} \right) \phi_{yaw} - \delta \omega_{ib,E}^n \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{yaw} = & -\left( \frac{\omega_e \cos \varphi}{R_M+h} + \frac{v_E \sec^2 \varphi}{(R_N+h)(R_M+h)} \right) \delta r_N - \frac{v_E \tan \varphi}{(R_N+h)^2} \delta r_D - \frac{\tan \varphi}{R_N+h} \delta v_E \\ & - \frac{v_N}{R_M+h} \phi_{roll} - \left( \omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N+h} \right) \phi_{pitch} - \delta \omega_{ib,D}^n \end{aligned} \quad (2.63)$$

#### 2.4.5.3 速度误差微分方程

对导航坐标系 ( $n$  系) 下的地速微分方程(2.28)进行误差扰动分析, 可得对应的地速误差微方程:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) + \delta \mathbf{g}_l^n \quad (2.64)$$

将式(2.64)各分量展开可得:

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_N = & -\left( \frac{2v_E \omega_e \cos \varphi}{R_M+h} + \frac{v_E^2 \sec^2 \varphi}{(R_M+h)(R_N+h)} \right) \delta r_N + \left( \frac{v_N v_D}{(R_M+h)^2} - \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(R_N+h)^2} \right) \delta r_D \\ & + \frac{v_D}{R_M+h} \delta v_N - 2 \left( \omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N+h} \right) \delta v_E + \frac{v_N}{R_M+h} \delta v_D - f_D \phi_{pitch} + f_E \phi_{yaw} + \delta f_N \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_E = & \left( \frac{2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi)}{R_M+h} + \frac{v_N v_E \sec^2 \varphi}{(R_M+h)(R_N+h)} \right) \delta r_N \\ & + \frac{v_E v_D + v_N v_E \tan \varphi}{(R_N+h)^2} \delta r_D + \left( 2\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N+h} \right) \delta v_N \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{R_N+h} \delta v_E + \left( 2\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N+h} \right) \delta v_D + f_D \phi_{roll} - f_N \phi_{yaw} + \delta f_E \\ \delta \dot{v}_D = & \frac{2\omega_e v_E \sin \varphi}{(R_M+h)} \delta r_N - \left( \frac{v_E^2}{(R_N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(R_M+h)^2} - \frac{2g_l}{\sqrt{R_M R_N + h}} \right) \delta r_D \\ & - \frac{2v_N}{R_M+h} \delta v_N - 2 \left( \omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N+h} \right) \delta v_E - f_E \phi_{roll} + f_N \phi_{pitch} + \delta f_D \end{aligned} \quad (2.67)$$

#### 2.4.5.4 位置误差微分方程

位置误差微分方程, 可通过误差扰动分析得到, 详细推导可参考(Benson 1975):

$$\delta \dot{\mathbf{r}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta \mathbf{r}^n + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n \quad (2.68)$$

式中,

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\lambda \cos \varphi \\ -\delta\varphi \\ -\delta\lambda \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta r_E / (R_N + h) \\ -\delta r_N / (R_M + h) \\ -\delta r_E \tan \varphi / (R_N + h) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

其中， $\delta\varphi$  和  $\delta\lambda$  分别为纬度和经度的误差，将式(2.68)展开可得，

$$\delta \dot{r}_N = -\frac{v_D}{R_M + h} \delta r_N + \frac{v_N}{R_M + h} \delta r_D + \delta v_N \quad (2.70)$$

$$\delta \dot{r}_E = \frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h} \delta r_N - \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{R_N + h} \delta r_E + \frac{v_E}{R_N + h} \delta r_D + \delta v_E \quad (2.71)$$

$$\delta \dot{r}_D = \delta v_D \quad (2.72)$$

#### 2.4.5.5 惯性传感器误差模型

惯导误差微分方程又被称为惯导误差传播模型，基于该方程可以进行纯惯导误差传递分析和设计组合导航卡尔曼滤波器（间接卡尔曼滤波）。对于 A-INS 轨道几何状态精密测量应用来说，惯性传感器的残余误差是影响测量精度的重要误差源，需要在组合导航滤波器中对重要的惯性传感器误差参数进行估计和补偿，主要是加速度计和陀螺的零偏误差和比例因子误差。常用的做法是将上述误差模型化，并将其增广到系统状态量中进行在线估计。

由于一阶高斯-马尔可夫过程符合大多数物理过程且有一个相对简单的数学描述，因此常用于描述随时间变化缓慢的 IMU 误差，如零偏和比例因子。连续型一阶高斯马尔可夫过程可由以下方程来描述(Maybeck 1982):

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{T} x(t) + w(t) \quad (2.73)$$

式中  $x(t)$  表示一阶高斯马尔可夫过程，由过程的均方值  $\sigma^2$  和相关时间  $T$  两个参数来描述。 $w(t)$  为驱动白噪声，其方差强度为  $q = 2\sigma^2/T$ 。一阶高斯马尔可夫过程的离散化形式为(Maybeck 1982):

$$x_{k+1} = e^{-\Delta t_{k+1}/T} x_k + w_k \quad (2.74)$$

离散化驱动白噪声的方差强度为  $q_k = \sigma^2 (1 - e^{-\Delta t_{k+1}/T})$ ， $\Delta t_{k+1}$  为采样时间间隔。

## 2.5 组合导航技术基础

惯性导航是一种投影和积分运算，其导航误差随时间积累，常需要与其他导航定位手段进行组合来解决精度发散的问题。组合导航是利用多种传感器提供的互补信息来提高导航系统的精度和冗余度的技术(武元新 2005)，有多种具体的实现方式，如松组合、紧组合和深组合等。松组合惯导与辅助信息（如 GNSS 位置，速度和速度约束等）在位置、速度和姿态这一信息层面的组合，组合形式简单(张全 2015, 班亚龙 2016)，本文采用松组合模式设计 A-INS 组合导航算法实现轨道几何状态的精密测量。多种传感器

的数据进行有效融合需要选用合适的最优估计算法,工程实践中最常采用的是卡尔曼滤波算法。针对 A-INS 组合导航解算中系统的非线性问题,具体采用扩展卡尔曼滤波。组合导航算法设计重点在于正确构建系统状态方程和观测方程。本节将首先简要介绍卡尔曼滤波技术,然后介绍如何构建 A-INS 组合导航的状态方程和观测方程。

### 2.5.1 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波算法(Kalman 1960, Gelb 1974, Maybeck 1982, Brown and Hwang 1997, 秦永元, 张洪钺 et al. 2015)作为一种重要的最优估计理论被广泛应用于各种领域,组合导航系统的设计是其成功应用中的一个最主要方面。卡尔曼滤波有离散型和连续型两类算法,前者可直接用于数字计算机上实现,后者更常用于卡尔曼滤波的理论性能分析。本文后续将介绍应用离散卡尔曼滤波算法实现 A-INS 组合导航解算的具体设计,而连续时间卡尔曼滤波则主要用于 A-INS 组合导航误差传播模型的理论分析。

#### 2.5.1.1 离散型卡尔曼滤波

假设有离散线性系统,  $k$  时刻的系统状态  $\mathbf{x}_k$  受系统噪声序列  $\mathbf{w}_{k-1}$  驱动; 系统状态方程及量测方程均为系统状态的线性方程(未考虑确定性控制输入项):

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k/k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.76)$$

其中,  $\mathbf{x}_k$  表示  $k$  时刻的系统状态向量 ( $n \times 1$ );  $\Phi_{k/k-1}$  为  $k-1$  到  $k$  时刻的一步转移矩阵 ( $n \times n$ );  $\Gamma_{k-1}$  为系统噪声驱动阵 ( $n \times s$ );  $\mathbf{z}_k$  为  $k$  时刻的量测向量 ( $m \times 1$ );  $\mathbf{H}_k$  为量测矩阵 ( $m \times n$ );  $\mathbf{w}_k$  为系统激励噪声序列 ( $s \times 1$ ),  $\mathbf{v}_k$  为量测噪声序列 ( $m \times 1$ ), 并且要求  $\mathbf{w}_k$  与  $\mathbf{v}_k$  是互不相关的零均值白噪声序列, 即满足:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \\ E(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.77)$$

式中,  $\mathbf{Q}_k$  为系统状态噪声方差阵,  $\mathbf{R}_k$  为量测噪声方差阵(Maybeck 1982, 秦永元, 张洪钺 et al. 2015)。在一个滤波周期内, 卡尔曼滤波的信息更新过程可以分为时间更新过程和量测更新过程。其中时间更新又被称为预测, 一步预测的状态及其协方差阵为(Brown and Hwang 1997):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (2.79)$$

在量测更新过程中首先计算增益矩阵, 然后更新系统状态及误差协方差阵。当  $\mathbf{Q}_k$  非负定,  $\mathbf{R}_k$  为正定阵时,  $\mathbf{x}_k$  的最优估计  $\hat{\mathbf{x}}_k$  可按下述方程求解:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.80)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \quad (2.81)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.82)$$

式(2.78)~(2.82)即离散型卡尔曼滤波的基本方程，只要给定初值  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$ ，根据  $k$  时刻的量测就可递推计算任意时刻  $k$  的状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。其中  $\mathbf{P}_k$  有多种等价的表达式，(2.82)被称为 Joseph 形式，由于能够保证  $\mathbf{P}_k$  的对称性和正定性(Maybeck 1982)，在工程中应用最为广泛。

虽然很多物理系统是连续系统，但只要合理离散化就能使用离散型卡尔曼滤波的基本方程，更多的卡尔曼滤波的设计技巧可参考文献(Maybeck 1982)。

### 2.5.1.2 连续型卡尔曼滤波

假设有连续时间系统，其系统状态方程和观测方程分别为（未考虑确定性控制输入项）：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (2.83)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.84)$$

式中  $\mathbf{x}$  为状态向量， $\mathbf{x}(t)$  为  $t$  时刻的系统状态。 $\mathbf{F}(t)$  为系统动态矩阵； $\mathbf{G}(t)$  为  $n \times s$  的系统噪声驱动矩阵； $\mathbf{w}(t)$  为系统激励噪声过程； $\mathbf{z}(t)$  为连续时间观测向量； $\mathbf{H}(t)$  为量测矩阵；量测噪声  $\mathbf{v}(t)$  为零均值的高斯白噪声过程。要求  $\mathbf{F}(t)$ ， $\mathbf{G}(t)$ ， $\mathbf{H}(t)$  至少为时间的分段连续函数，且系统噪声  $\mathbf{w}(t)$  与量测噪声  $\mathbf{v}(t)$  不相关，满足：

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0}, & E[\mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}(t) \delta(t - \tau) \\ E[\mathbf{v}(t)] = \mathbf{0}, & E[\mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{R}(t) \delta(t - \tau) \end{cases} \quad (2.85)$$

式中  $\delta(\cdot)$  表示狄拉克函数，其单位为 1/s（时间的倒数）。

连续型卡尔曼滤波方程可在离散时间卡尔曼滤波方程的基础上对采样时间间隔取极限（ $\Delta t \rightarrow 0$ ）推导得到，详细推导过程可参考(Maybeck 1982, 秦永元, 张洪钺 et al. 2015)：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}_c^{-1}(t) [\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t) \hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (2.86)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{G}^T(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}_c^{-1}(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{P}(t) \quad (2.87)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}_c^{-1}(t) \quad (2.88)$$

式(2.86)~(2.88)这组微分方程即连续时间卡尔曼滤波的基本方程；其中(2.87)是关于  $\mathbf{P}(t)$  的非线性矩阵微分方程，称为黎卡蒂 (Riccati) 方程；解这组微分方程的初值选取如下：

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (2.89)$$

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \quad (2.90)$$



通过求解连续时间卡尔曼滤波微分方程组可得到系统状态变量的连续时间估值, 该方程的解存在且唯一, 但算法失去了递推性, 且该方程组的数值解对积分步长比较敏感, 具体可参考(Maybeck 1982)。

### 2.5.2 最优平滑算法

卡尔曼滤波只能基于当前时刻和之前的量测信息来估计当前状态, 并未使用所关注时间点之后的观测量, 这对于非实时应用来说对数据的利用率不够充分(张全 2015)。最优平滑算法还利用所关注时间点之后的测量数据来估计当前系统状态, 得到更高精度的估计参数。最优平滑算法可分为固定点平滑、固定滞后平滑和固定区间平滑三种类型, 可参考(Meditch 1969, Maybeck 1982, 秦永元, 张洪钺 et al. 2015, 张全 2015)。针对 A-INS 轨道几何状态测量后处理应用, 本文采用固定区间平滑算法。

固定区间平滑算法可利用测量时段内所有量测信息对时段内任一时刻的系统状态量进行估计。平滑过程可以被看作正反两个滤波最优估计的组合, 也即前向-后向平滑算法。前向-后向滤波算法包含前向和后向两个独立的滤波器, 前向滤波器是标准的卡尔曼滤波, 后向滤波是一个在时间上从后往前工作的卡尔曼滤波。两个滤波器是相互独立的, 不能用前向滤波器的结果来初始化后向滤波器。平滑估计的结果是两个滤波结果的加权组合, 权值由它们误差协方差矩阵的比值来决定(Fraser and Potter 1969, Maybeck 1982, Groves 2013)。

前向-后向平滑算法的连续时间形式为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{sm}(t) = \mathbf{P}_{sm}(t) [\mathbf{P}_f^{-1}(t) \hat{\mathbf{x}}_f(t) + \mathbf{P}_b^{-1}(t) \hat{\mathbf{x}}_b(t)] \quad (2.91)$$

$$\mathbf{P}_{sm}^{-1}(t) = \mathbf{P}_f^{-1}(t) + \mathbf{P}_b^{-1}(t) \quad (2.92)$$

式中,  $\hat{\mathbf{x}}_f(t)$  表示前向卡尔曼滤波对  $t$  时刻系统状态量的最优估计, 其方差协方差阵为  $\mathbf{P}_f(t)$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_b(t)$  表示后向滤波对  $t$  时刻系统状态量的最优估计, 其方差协方差阵为  $\mathbf{P}_b(t)$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_{sm}(t)$  表示平滑算法对  $t$  时刻系统状态量的最优估计, 对应的方差协方差阵为  $\mathbf{P}_{sm}(t)$ 。在 A-INS 组合导航中具体实现反向平滑算法时需采用(2.91)~(2.92)对应的离散时间算法。

前向-后向平滑算法的思路易于理解, 但是后向滤波需要进行诸多的矩阵求逆运算(秦永元, 张洪钺 et al. 2015)。1965 年 H. Rauch, F. Tung 和 C. Striebel 提出了 RTS 算法(Rauch, Striebel et al. 1965), 该算法取消了后向滤波过程, 将平滑最优估计看成是对卡尔曼滤波最优估计进行修正的过程(Fraser and Potter 1969)。RTS 平滑算法在 A-INS 组合导航数据后处理中比较常用, 计算过程分为两步。第一步: 正向卡尔曼滤波随时间向前运行, 每次时间更新(系统传播)和观测更新之后都要记录状态量  $\mathbf{x}$  及其误差方差协方差阵  $\mathbf{P}$ , 同时还要记录状态转移矩阵  $\Phi$ 。第二步: 正向卡尔曼滤波计算到数据的末尾后, 则根据上述记录的数据开始反向从末尾到起始点进行数据平滑。从前向-后向滤波的基

基础上可以推导出 RTS 算法(秦永元, 张洪钺 et al. 2015), 具体方程为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/N} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k} + \mathbf{A}_k \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k+1/N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} \right] \quad (2.93)$$

$$\mathbf{P}_{k/N} = \mathbf{P}_{k/k} + \mathbf{A}_k \left[ \mathbf{P}_{k+1/N} - \mathbf{P}_{k+1/k} \right] \mathbf{A}_k^T \quad (2.94)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_{k/k} \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{P}_{k+1/k}^{-1} \quad (2.95)$$

式中,  $k = N-1, N-2, \dots, 0$ ,  $N$  为观测信息的总数,  $\mathbf{A}_k$  为平滑增益矩阵。

### 2.5.3 A-INS 组合导航算法

在轨道几何状态精密测量中 A-INS 组合导航解算采用松组合模式, 多源传感器数据通过扩展卡尔曼滤波进行融合。本节介绍 A-INS 组合导航解算的卡尔曼滤波算法设计: 首先建立离散时间系统模型; 然后针对各类可用的辅助信息构建误差状态的线性观测方程; 有了系统模型和观测方程则可直接使用卡尔曼滤波的基本方程进行组合导航解算。

#### 2.5.3.1 离散时间系统

带有辅助信息的惯性导航常采用误差状态卡尔曼滤波(间接卡尔曼滤波)进行组合导航解算, 以解决系统的非线性问题。根据前面的惯导误差微分方程和传感器误差模型, 并将惯性传感器主要误差参数(加速度计和陀螺的零偏及比例因子误差)增广到卡尔曼滤波的系统状态中, 可以得到 A-INS 扩展卡尔曼滤波的状态向量及连续时间状态方程。其中误差状态向量定义为:

$$\mathbf{x}(t) = \left[ \left( \delta \mathbf{r}_{INS}^n \right)^T \quad \left( \delta \mathbf{v}_{INS}^n \right)^T \quad \boldsymbol{\phi}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{s}_g^T \quad \mathbf{s}_a^T \right]^T \quad (2.96)$$

式中,  $\delta \mathbf{r}_{INS}^n$  为惯导位置误差向量, 见式(2.50);  $\delta \mathbf{v}_{INS}^n$  为惯导速度误差向量, 见式(2.51);  $\boldsymbol{\phi}$  为姿态误差向量, 见式(2.52);  $\mathbf{b}_g$  为三轴陀螺零偏向量;  $\mathbf{b}_a$  为三轴加速度计零偏向量;  $\mathbf{s}_g$  为陀螺比例因子误差向量;  $\mathbf{s}_a$  为加速度计比例因子误差向量。将零偏误差和比例因子误差建模为一阶高斯马尔可夫过程, 其微分方程为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{b}}_g(t) = -\frac{1}{T_{gb}} \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{w}_{gb}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}_a(t) = -\frac{1}{T_{ab}} \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{w}_{ab}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}_g(t) = -\frac{1}{T_{gs}} \mathbf{s}_g(t) + \mathbf{w}_{gs}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}_a(t) = -\frac{1}{T_{as}} \mathbf{s}_a(t) + \mathbf{w}_{as}(t) \end{cases} \quad (2.97)$$

式中,  $T_{gb}$ ,  $T_{ab}$ ,  $T_{gs}$ ,  $T_{as}$  为一阶高斯马尔可夫过程的相关时间,  $\mathbf{w}_{gb}(t)$ ,  $\mathbf{w}_{ab}(t)$ ,  $\mathbf{w}_{gs}(t)$ ,  $\mathbf{w}_{as}(t)$  为一阶高斯马尔可夫过程的驱动白噪声。A-INS 组合导航卡尔曼滤波器的连续时间误差状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2.98)$$

式中各符号含义见(2.83); 为方便使用离散时间卡尔曼滤波的基本方程, 首先需要将(2.98)离散化, 得到离散时间误差状态方程:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1/k}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.99)$$

其中,  $\Phi_{k+1/k}\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{w}_k$  的表达式如下:

$$\begin{cases} \Phi_{k+1/k} = \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(t) dt\right) \\ \mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) dt \end{cases} \quad (2.100)$$

当  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  较短时,  $\mathbf{F}(t)$  可近似为常矩阵; 状态转移矩阵可取近似:

$$\Phi_{k+1/k} = \exp\{\mathbf{F}(t_k)\Delta t\} \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(t_k)\Delta t \quad (2.101)$$

对驱动白噪声过程的等效离散化处理(秦永元, 张洪钺 et al. 2015):

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \\ E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \end{cases} \quad (2.102)$$

式中,

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{Q} \mathbf{G}^T(t) \Phi^T(t_{k+1}, t) dt \quad (2.104)$$

$\mathbf{Q}$  为驱动白噪声过程  $\mathbf{w}(t)$  的方差强度;  $\mathbf{Q}_k$  可简化为梯形积分(Maybeck 1982)。

$$\mathbf{Q}_k \approx \frac{1}{2} \left[ \Phi_{k+1/k} \mathbf{G}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \mathbf{G}^T(t_k) \Phi_{k+1/k}^T + \mathbf{G}(t_{k+1}) \mathbf{Q}(t_{k+1}) \mathbf{G}^T(t_{k+1}) \right] \Delta t \quad (2.105)$$

从式(2.102)可知,  $\mathbf{w}_k$  为白噪声序列, (2.99)描述的等效离散系统满足离散型卡尔曼滤波的基本方程要求。

### 2.5.3.2 GNSS 位置观测方程

GNSS 定位解算给出的是天线相位中心 (或其它参考点) 的位置坐标, INS 机械编排给出的是 IMU 测量中心的导航结果, 二者在物理上不重合, 组合导航解算时需进行杆臂效应改正(Shin 2005)。GNSS 天线相位中心与 IMU 测量中心之间的位置转换关系式为:

$$\mathbf{r}_{GNSS}^n = \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{D}_R^{-1} \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \quad (2.106)$$

$$\mathbf{D}_R^{-1} = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_M + h & (R_N + h) \cos \varphi & \end{bmatrix}^T \right) \quad (2.107)$$

式(2.106)中  $\mathbf{r}_{GNSS}^n$  表示 GNSS 天线相位中心的位置;  $\mathbf{r}_{IMU}^n$  表示 IMU 测量中心的实际位置 (注意与后文带有误差的  $\mathbf{r}_{INS}^n$  区别开来); 位置向量采用纬度、经度和高程的大地坐标形式表示;  $\mathbf{l}_{GNSS}^b$  为 GNSS 天线的杆臂向量, 即 IMU 测量中心指向 GNSS 天线相位中

心的向量在  $b$  系下的投影。杆臂值  $\mathbf{l}_{GNSS}^b$  可以通过精密测量手段进行测量标定。

由 INS 导航结果及杆臂测量值推算出 GNSS 天线相位中心的位置为：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n &= \hat{\mathbf{r}}_{IMU}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \\ &= \mathbf{r}_{IMU}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \\ &\approx \mathbf{r}_{GNSS}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi}\end{aligned}\quad (2.108)$$

GNSS 定位解算得到的 GNSS 天线相位中心的位置表示为：

$$\tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n = \mathbf{r}_{GNSS}^n - \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \mathbf{n}_{rG}\quad (2.109)$$

式中， $\mathbf{n}_{rG}$  为 GNSS 位置误差。一般地，为简化处理常将 GNSS 位置测量值的误差建模为白噪声序列，这对于采样率不大于 1 Hz 的 GNSS 解算结果来说是合理的(Niu, Chen et al. 2014)。

量测向量/观测向量表示为 INS 推算的位置与 GNSS 解算的位置之差：

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{rGNSS} &= \hat{\mathbf{D}}_R (\hat{\mathbf{r}}_{GNSS}^n - \tilde{\mathbf{r}}_{GNSS}^n) \\ &\approx \hat{\mathbf{D}}_R (\hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} (\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} - \hat{\mathbf{D}}_R^{-1} \mathbf{n}_{rG}) \\ &\approx \delta \mathbf{r}_{IMU}^n + (\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}_{rG}\end{aligned}\quad (2.110)$$

根据扩展卡尔曼滤波的定义(Maybeck 1982, Shin 2005, Groves 2013)， $\mathbf{H}_{rGNSS}$  矩阵各元素具体的值通过在最新的状态（预测值）估计值附近求偏微分得到：

$$\mathbf{H}_{rGNSS,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)} = \left. \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)}\quad (2.111)$$

因此，GNSS 位置观测值的量测矩阵为：

$$\mathbf{H}_{rGNSS} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & (\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}\quad (2.112)$$

### 2.5.3.3 GNSS 速度观测方程

GNSS 采用多普勒测速可以提供相对独立的三维速度观测值。根据 IMU 速度推算 GNSS 天线相位中心速度的理论模型为(Shin 2005)：

$$\mathbf{v}_{GNSS}^n = \mathbf{v}_{IMU}^n - [(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times) + (\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times)] \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\quad (2.113)$$

除非杆臂特别大，对于低速运动场景，式(2.113)右边第二项的幅值很小，很多情况下可直接忽略。根据惯导机械编排得到的导航结果，可以推算得到 GNSS 天线相位中心的速度，忽略误差的二阶小量，忽略地球自转角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  及  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  相关的误差项，可得：

$$\hat{\mathbf{v}}_{GNSS}^n \approx \mathbf{v}_{GNSS}^n + \delta \mathbf{v}_{IMU}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\quad (2.114)$$

GNSS 解算的天线相位中心速度为：

$$\tilde{\mathbf{v}}_{GNSS}^n = \mathbf{v}_{GNSS}^n - \mathbf{n}_{vG}\quad (2.115)$$

速度量测向量可表示为 INS 推算的速度与 GNSS 解算的速度之差：

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{vGNSS} &= \hat{\mathbf{v}}_{GNSS}^n - \tilde{\mathbf{v}}_{GNSS}^n \\ &\approx \delta \mathbf{v}_{IMU}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{n}_{vG} \end{aligned} \quad (2.116)$$

因此, GNSS 速度观测值的观测矩阵为:

$$\mathbf{H}_{vGNSS} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_{vG,3} & -\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{vG,6} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{vG,3} = -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}_{GNSS}^b \times) - [\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times] \\ \mathbf{H}_{vG,6} = -\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}_{GNSS}^b \times) \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \end{cases} \quad (2.118)$$

#### 2.5.3.4 车体速度观测方程

根据 A-INS 轨检小车车体结构和行走轮的机械设计 (详见第 5 章), 小车在运动过程中车轮在侧向上紧贴钢轨内侧, 垂向上与钢轨轨顶面保持刚性连续接触。因此, A-INS 轨检小车只有沿着轨道纵向里程方向上的运动速度, 而在与之垂直的侧向和垂向 (即 Frenet 坐标系的  $y$  和  $z$  轴方向), 速度为零。即钢轨对轨检小车的运动状态形成了非完整性约束, 这对于正常行驶的汽车来说也近似成立。

IMU 测量中心的速度  $\mathbf{v}_{IMU}^n$  与车轮的速度  $\mathbf{v}_{wheel}^v$  之间的关系式为:

$$\mathbf{v}_{wheel}^v = \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b \mathbf{v}_{IMU}^n + \mathbf{C}_b^v (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \mathbf{l}_{wheel}^b \quad (2.119)$$

式中上标  $v$  表示在车体坐标系下投影;  $\mathbf{l}_{wheel}^b$  为车轮速度传感器的杆臂向量, 即 IMU 测量中心指向车轮速度传感器的向量在  $b$  系下的投影。

由 INS 机械编排结果推算得到的车轮速度  $\hat{\mathbf{v}}_{wheel}^v$  为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{wheel}^v &= \mathbf{C}_b^v \hat{\mathbf{C}}_n^b \hat{\mathbf{v}}_{IMU}^n + \mathbf{C}_b^v (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times) \mathbf{l}_{wheel}^b \\ &\approx \mathbf{v}_{wheel}^v + \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b \delta \mathbf{v}_{IMU}^n - \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b (\mathbf{v}_{IMU}^n \times) - \mathbf{C}_b^v (\mathbf{l}_{wheel}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (2.120)$$

车体坐标系下的速度测量值可表示为:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{wheel}^v = \mathbf{v}_{wheel}^v - \mathbf{n}_{vW} \quad (2.121)$$

当车辆运动满足非完整性约束时, 速度测量值向量  $\tilde{\mathbf{v}}_{wheel}^v$  表达式如下:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{wheel}^v = [v \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.122)$$

式(2.121)中的  $v$  表示前向运动速度, 可由里程计提供; 侧向和垂向的零速为虚拟速度观测值;  $\mathbf{n}_{vW}$  表示速度测量噪声; 其中  $\mathbf{n}_{vW}$  的第二、三个元素需要根据实际的非完整性约束成立的条件来确定。

车体速度量测方程可表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{vW} &= \hat{\mathbf{v}}_{wheel}^v - \tilde{\mathbf{v}}_{wheel}^v \\ &= \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b \delta \mathbf{v}_{IMU}^n - \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b (\mathbf{v}_{IMU}^n \times) \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^v (\mathbf{l}_{wheel}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{n}_{vW} \end{aligned} \quad (2.123)$$

车体坐标系下速度观测值的量测矩阵为:

$$\mathbf{H}_{vW} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b & -\mathbf{C}_b^v \mathbf{C}_n^b (\mathbf{v}_{IMU}^n \times) & -\mathbf{C}_b^v (\mathbf{l}_{wheel}^b \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{vW,6} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

其中,

$$\mathbf{H}_{vW,6} = -\mathbf{C}_b^v (\mathbf{l}_{wheel}^b \times) \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \quad (2.125)$$

式中  $\mathbf{C}_b^v$  可以由  $b$  系与  $v$  系之间的三个欧拉角计算得到, 因此必须准确标定或估计这三个欧拉角。俯仰和航向安装角误差将直接影响非完整性约束更新的效果, 为此 IMU 安装误差角的标定精度不应低于 INS 的姿态精度。

## 2.6 本章小结

本章对基于 A-INS 组合导航的轨道精密测量技术研究所涉及的铁路轨道几何状态、惯性导航以及组合导航算法进行了全面阐述。

本章首先介绍了铁路轨道的主要几何参数; 从轨道不平顺的定义出发, 指出了轨道不平顺测量本质上是一种相对位置测量; 并阐述了轨道几何状态精密测量的关键挑战所在。然后, 提出了基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何状态精密测量方案, 阐述了其基本原理。最后, 对 A-INS 轨检小车的误差源进行了详细的分类讨论, 明确指出 A-INS 轨检小车测量误差理论研究的核心是 A-INS 组合导航的随机过程误差。

惯性导航是 A-INS 轨道精密测量技术的基础。本章介绍了惯性导航所涉及的常用坐标系; 给出了惯性传感器误差的分类; 描述了惯导姿态表达式及详细的机械编排算法; 最后, 推导了惯性导航误差微分方程及惯性传感器误差模型, 作为后续组合导航算法和 A-INS 误差传播模型研究的基础之一。

本章最后详细阐述了 A-INS 组合导航算法。首先, 介绍了组合导航常用的卡尔曼滤波算法, 其中离散时间卡尔曼滤波用于具体的算法实现, 而连续时间卡尔曼滤波则作为组合导航误差传播理论研究的基础; 然后, 介绍了组合导航数据后处理中常用的最优平滑算法; 最后, 推导了 A-INS 组合导航的离散时间系统状态方程和组合导航卡尔曼滤波的各类辅助观测量所对应的观测方程, 包括 GNSS 位置观测、GNSS 速度观测和车体速度观测方程。基于上述离散的状态方程和观测方程, 套用卡尔曼滤波的基本算法公式即可实现 A-INS 松组合解算; 同时, 连续时间的 A-INS 松组合算法也是后续组合导航误差传播理论研究的基础。

### 3 A-INS 轨道测量误差传播分析

#### 3.1 引言

本章研究 A-INS 测量误差传播模型,并基于该模型对 A-INS 测量误差做定量分析。由于系统输入包含了随机误差, A-INS 组合导航输出误差必然也是一个随机过程。如第 1 章所述,本文研究 A-INS 测量误差传播模型的出发点和视角与传统的组合导航误差传播研究均不相同,二者有显著差异。

传统的导航定位应用主要关注 A-INS 组合导航输出误差这一随机过程的统计特性,用相应的数字特征来描述这一随机过程的幅度特性。随机过程在任意时刻  $t$  的取值是一个随机变量,该随机变量的数字特征,如数学期望、均方值、方差等可以描述该时刻的绝对误差水平。传统的导航定位应用正是以这类统计值来描述系统的绝对精度。诚然,这类应用也需要研究误差的传播规律,但是其考察的是上述统计值随时间的变化,例如通过研究 A-INS 组合导航卡尔曼滤波方差/协方差矩阵 ( $P$  阵) 阵随时间的变化规律来描述导航误差的发散与收敛。但是随机过程的上述数字特征主要是描述随机过程的幅度特性,并不足以完全准确地描述随机过程本身,尤其是历元间的时间相关性或相对大小。

下面以一个简单的例子来直观描述这一问题。有随机常数和白噪声两个随机过程,二者具有相同的均方根数字特征:即两个随机过程在任意时刻  $t$  的均方根相等,且不随时间变化。如果仅考察随机过程的数字特征,如均方根或方差,二者并无区别,但是随机常数和白噪声这两种随机过程的特性却有着天壤之别,各历元之间的相关性也完全不同,如图 3-1 所示。

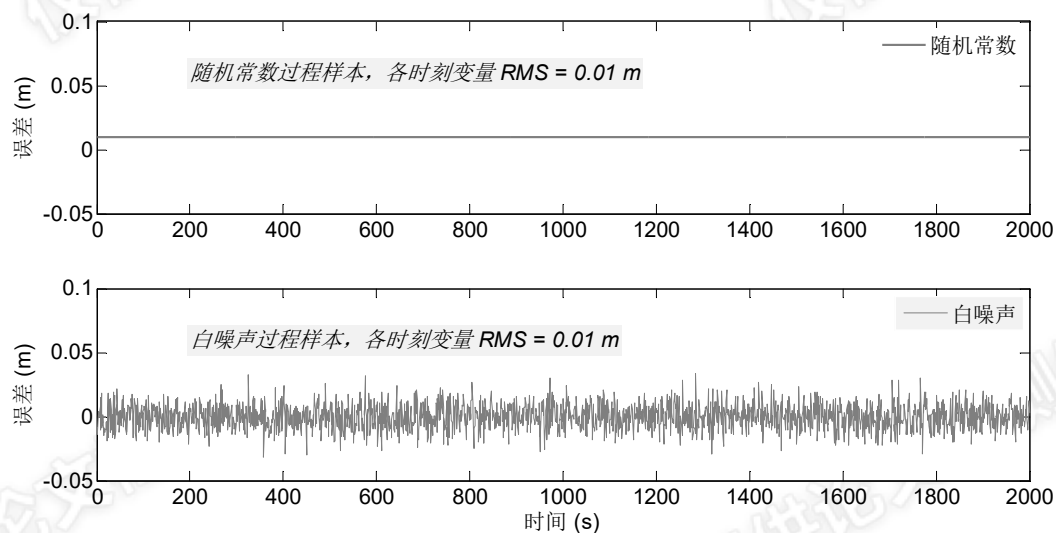


图 3-1 随机常数和白噪声过程的样本序列;虽然两个随机过程的均方值相等,但是二者的随机过程特性却完全不同,历元间的相关性也有显著的差异;仅通过某些数字特征并不足以完全准确地描述随机过程本身

铁路轨道不平顺测量所关注的是位置坐标测量值之间（尤其是临近的历元之间）的相对误差，而不是系统的绝对误差水平。如果孤立地研究单个测量历元的绝对误差水平（如位置误差 RMS，如图 3-1），则无法准确评估出 A-INS 的相对测量精度，而应该更细致地研究 A-INS 测量误差这一随机过程，尤其是其时间相关性，基于该随机过程的特性从理论上导出轨道几何参数的测量精度。这也是本文与现有组合导航误差传播模型研究的主要区别所在。

针对铁路轨道测量这一特殊应用可对惯导误差微分方程和 A-INS 观测方程进行简化，则组合导航的连续时间间接卡尔曼滤波器达到稳态后可当作一个线性随机系统来研究。该系统由多路高斯白噪声激励，其系统输出（如导航误差）也是个多维的随机过程。只要建立该系统的传递函数，即可得到对应的误差传播模型。基于误差传播模型，在已知输入随机信号的情况下就可以分析系统输出的随机过程特性，以及对轨道测量误差做定量分析和研究。

本章将重点介绍 A-INS 测量误差传播模型的建模思路，并基于该模型进行定量分析，研究内容的安排如图 3-2 所示。

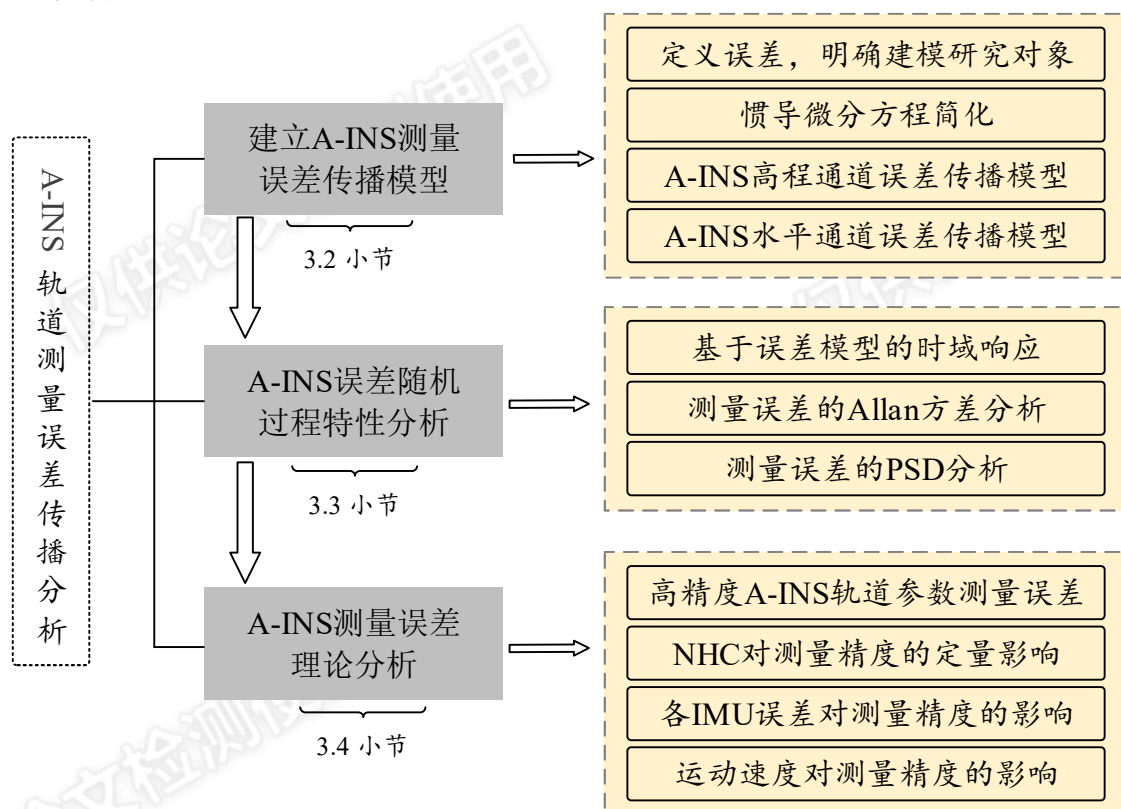


图 3-2 本章的研究内容安排

3.2 小节建立 A-INS 测量误差传播模型；首先，从轨道不平顺的定义出发推导轨道不平顺测量误差与 A-INS 位置误差之间的关系，明确误差建模的研究对象。其次，根据轨道测量的运动场景，对惯导误差微分方程进行简化、解耦。然后，介绍线性定常系统



达到稳态时, 连续时间卡尔曼滤波的系统传递函数, 作为 A-INS 误差建模的主要思路。最后, 建立高程通道和水平通道的 A-INS 误差传播模型, 得到各误差源与最终测量误差之间的拉普拉斯域传递函数, 完成建模工作。3.3 节基于建立的误差传递模型, 在给定误差参数的情况下, 通过蒙特卡洛仿真得到 A-INS 测量误差模型的时域响应样本; 在此基础上分析测量误差随机过程特性, 包括 Allan 方差分析与功率谱密度分析(PSD), 用以描述随机过程的特性、识别噪声类型。3.4 节则基于所建立的误差传播模型, 对 A-INS 的轨道几何参数测量误差做定量分析; 讨论非完整性约束(NHC)对于提高 A-INS 相对测量精度的重要作用; 研究各主要惯性传感器误差对最终轨道几何参数测量精度的定量影响; 最后讨论小车运动速度对测量精度的影响。

### 3.2 A-INS 测量误差传播模型

本节建立 A-INS 测量误差传播模型, 具体的研究思路如图 3-3 所示。首先从轨道不平顺的定义出发推导轨道不平顺测量误差与 A-INS 位置误差之间的关系, 明确误差建模的研究对象。然后, 针对铁路轨道测量这一应用场景对纯惯导误差微分方程和观测方程进行简化。最后阐述连续时间卡尔曼滤波达到稳态时的性能分析方法, 作为分析 A-INS 组合导航误差随机过程特性的基本方法, 建立 A-INS 组合导航在高程通道和水平通道的误差传播模型。

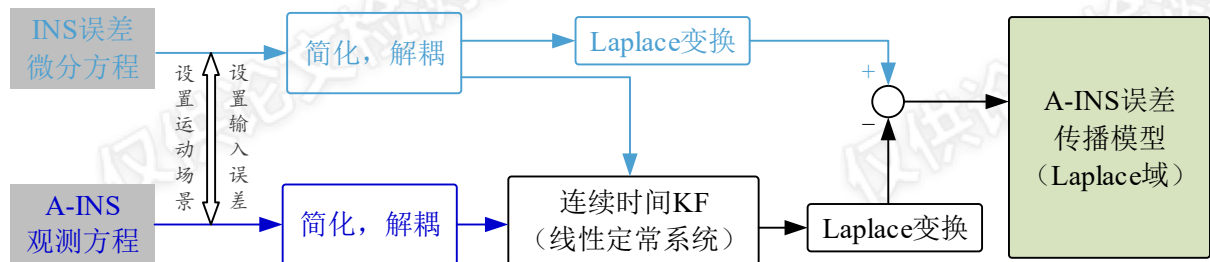


图 3-3 A-INS 测量误差传播模型研究思路

#### 3.2.1 误差及变量定义

首先定义惯导位置误差  $\delta \mathbf{r}_{INS}(t)$ :

$$\delta \mathbf{r}_{INS}(t) \triangleq \mathbf{r}_{INS}(t) - \mathbf{r}_{real}(t) \quad (3.1)$$

式中  $\mathbf{r}_{real}(t)$  为惯导的真实位置 (即位置的真值),  $\mathbf{r}_{INS}(t)$  为惯导推算的位置,  $\delta \mathbf{r}_{INS}(t)$  为惯导推算位置的误差。 $\delta \mathbf{r}_{INS}(t)$  是 A-INS 组合导航间接卡尔曼滤波状态量中的位置误差分量, 见式(2.96); A-INS 组合导航卡尔曼滤波对  $\delta \mathbf{r}_{INS}(t)$  进行估计得到对应的最优估值, 记作  $\widehat{\delta \mathbf{r}_{INS}}(t)$ 。

组合导航卡尔曼滤波对参数  $\delta \mathbf{r}_{INS}(t)$  的最优估值  $\widehat{\delta \mathbf{r}_{INS}}(t)$  本身也存在估计误差, 记作:

$$\delta[\widehat{\delta \mathbf{r}_{INS}}(t)] \triangleq \widehat{\delta \mathbf{r}_{INS}}(t) - \delta \mathbf{r}_{INS}(t) \quad (3.2)$$

组合导航卡尔曼滤波输出的误差状态最优估值用于反馈修正惯导的导航结果, 得到

导航参数的最优估值。从惯导推算的位置向量  $\mathbf{r}_{INS}(t)$  中减去位置误差的最优估值  $\widehat{\delta\mathbf{r}}_{INS}(t)$  (即 A-INS 组合导航中对位置分量的反馈修正过程) 可得到位置的最优估计  $\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$ , 其中下标 “*est*” 强调最优估计:

$$\hat{\mathbf{r}}_{est}(t) = \mathbf{r}_{INS}(t) - \widehat{\delta\mathbf{r}}_{INS}(t) \quad (3.3)$$

惯导位置最优估计  $\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$  的误差记作:

$$\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t) \triangleq \hat{\mathbf{r}}_{est}(t) - \mathbf{r}_{real}(t) \quad (3.4)$$

$\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$  与  $\widehat{\delta\mathbf{r}}_{INS}(t)$  的含义不同, 注意区分。将(3.3)和(3.1)带入(3.4), 整理可得:

$$\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t) = \delta\mathbf{r}_{INS}(t) - \widehat{\delta\mathbf{r}}_{INS}(t) \quad (3.5)$$

对比(3.5)和(3.2)可知两者是一回事, 即通过间接卡尔曼滤波对惯导推算结果做修正后给出的组合导航位置最优估值的误差  $\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$ , 实际上就是间接卡尔曼滤波对惯导位置推算误差的估计误差  $\delta[\widehat{\delta\mathbf{r}}_{INS}(t)]$ 。本文后续章节统一采用  $\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$  来表示。

$\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$  中的相对误差成份决定了轨道不平顺的测量精度, 因此本文需要重点研究  $\delta\hat{\mathbf{r}}_{est}(t)$  的随机过程特性。

根据式(2.2)可知, 以直线轨道为例, 轨道不平顺参数等于两个检核点处的正矢偏差之差, 表示为:

$$\Delta V(l, \Delta l) = [V_{real}(l + \Delta l) - V_{design}(l + \Delta l)] - [V_{real}(l) - V_{design}(l)] \quad (3.6)$$

式中  $V_{design}(l)$  和  $V_{design}(l + \Delta l)$  分别为里程  $l$  和里程  $l + \Delta l$  处钢轨到同一弦线上的设计正矢,  $V_{real}(l)$  和  $V_{real}(l + \Delta l)$  则为对应的实际正矢; 当轨道发生变形时, 实际正矢往往不等于设计正矢。 $\Delta V(l, \Delta l)$  则为轨道不平顺参数 (称为差分正矢), 是里程  $l$  和检核点对里程间距  $\Delta l$  的函数。例如当  $\Delta l = 5\text{m}$  时,  $\Delta V(l, \Delta l)$  对应为 30 m 弦 5 m 检核点对的短波不平顺, 其计算值归算到里程  $l$  上。

用 A-INS 轨检小车对实际轨道进行测量, 根据组合导航结果可得到实测正矢和轨道不平顺参数。根据式(3.6)可得实测轨道不平顺的计算式为:

$$\widehat{\Delta V}(l, \Delta l) = [\widehat{V}_{est}(l + \Delta l) - V_{design}(l + \Delta l)] - [\widehat{V}_{est}(l) - V_{design}(l)] \quad (3.7)$$

式中  $\widehat{V}_{est}(l)$  和  $\widehat{V}_{est}(l + \Delta l)$  分别表示  $V_{real}(l)$  和  $V_{real}(l + \Delta l)$  的实测值, 下标 “*est*” 强调实测值来自于 A-INS 组合导航的最优估计值。式(3.7)减去(3.6)可得:

$$\widehat{\Delta V}(l, \Delta l) - \Delta V(l, \Delta l) = [\widehat{V}_{est}(l + \Delta l) - V_{real}(l + \Delta l)] - [\widehat{V}_{est}(l) - V_{real}(l)] \quad (3.8)$$

式(3.8)的左边表示轨道不平顺的实测误差, 记为:

$$\delta[\widehat{\Delta V}(l, \Delta l)] = \widehat{\Delta V}(l, \Delta l) - \Delta V(l, \Delta l) \quad (3.9)$$

式(3.8)中  $\widehat{V}_{est}(l) - V_{real}(l)$  为 A-INS 的正矢实测误差, 也即里程  $l$  处 A-INS 位置误差在正矢方向上的投影。当正矢向量为水平和垂向 (其定义参考第二章 Frenet 坐标系的轴系) 时, 分别反映的是轨向不平顺和高低不平顺。因此, 轨道不平顺的测量精度本质上

取决于 A-INS 组合导航位置坐标序列的相对精度；可以通过研究 A-INS 组合导航在特定方向上的相对位置误差特性来分析其轨道不平顺测量精度，将  $\widehat{V}_{est}(l) - V_{real}(l)$  表示为  $\delta\hat{r}_{est,x^*}(l)$ ，表示里程  $l$  处的 A-INS 位置误差在  $x^*$ （如图 2-11 所示的 Frenet 坐标系的  $y$  或  $z$  方向）方向上的投影，则有轨道不平顺测量误差：

$$\widehat{\Delta V}(l, \Delta l) - \Delta V(l, \Delta l) = \delta\hat{r}_{est,x^*}(l + \Delta l) - \delta\hat{r}_{est,x^*}(l) \quad (3.10)$$

式中， $\delta\hat{r}_{est,x^*}(l)$  表示里程  $l$  处的 A-INS 位置误差在  $x^*$ （如图 2-11 所示的 Frenet 坐标系的  $y$  或  $z$  方向）方向上的投影。当小车匀速运动时，两个里程点上的实测正矢之差可以转换为两个时间点上的实测正矢之差，即在匀速运动的假设条件下，可通过分析不同时间间隔的 A-INS 相对位置误差来分析其轨道不平顺的测量精度。

$$\widehat{\Delta V}(t, \Delta t) - \Delta V(t, \Delta t) = \delta\hat{r}_{est,x^*}(t + \Delta t) - \delta\hat{r}_{est,x^*}(t) \quad (3.11)$$

从(3.5)和(3.11)可以看出，分析 A-INS 轨检小车的轨道不平顺测量精度关键在于分析  $\delta\hat{r}_{est}(t)$  在里程尺度  $\Delta l$  上（或者说时间尺度  $\Delta t$  上）的随机过程特性。下面将分析 A-INS 位置误差的随机过程特性，并据此评估其相对位置精度及轨道不平顺的测量精度。

### 3.2.2 惯导误差方程简化

A-INS 组合导航系统较为复杂，直接分析其导航结果的误差特性难度很大。但针对铁路轨道不平顺测量这一特殊的应用场景，可以对组合导航的系统状态方程和观测方程进行合理的近似和简化以降低系统分析的复杂度。

轨检小车运动轨迹假设：铁路轨道的线型一般包括直线、缓和曲线和圆曲线，而高速铁路的曲线段又往往具有很大的曲率半径，在一定长度范围内也可以近似为直线。A-INS 轨检小车在轨道上运动时的轨迹和姿态变化非常确定，由于轨检小车的设计运动速度不超过 5 m/s，在轨道上运动时惯导的姿态变化率很小。因此，本文理论分析部分只考虑直线轨迹的情况。更进一步，我们只针对匀速直线运动的情况进行分析，因为匀速直线运动是轨道测量操作中最具代表性的动态，对于 A-INS 组合导航来说也是最具挑战的测量场景。加减速和曲线运动反而能够增强组合导航误差的可观测性（如航向角），从而提高测量精度；也即当 A-INS 轨检小车存在加减速或拐弯运动时，其精度是优于匀速直线运动场景的(Li, Chen et al. 2012)。为简化分析，不失一般性的进一步假设轨检小车沿着正北方向匀速直线运动，且  $b$  系、 $v$  系和  $n$  系三个坐标系的坐标轴重合，不存在相对旋转，坐标转换矩阵为单位阵。

惯导辅助信息假设：假设有连续的高精度 GNSS 位置辅助（如短基线 PPK 定位结果；而当 GNSS 信号被遮挡时，有其它手段来保证高精度位置辅助），其绝对位置误差水平方向为 1 cm ( $1\sigma$ )，高程为 2 cm ( $1\sigma$ )。假设 GNSS 天线杆臂为 0（实际杆臂可精确测量和补偿）。由于轨检小车在运动过程中要求与钢轨保持密贴才能反映真实的轨道几何形状，因此轨检小车的运动很好地符合非完整性约束，可充分利用该约束作为  $v$

系下的虚拟速度观测来修正惯导，这里假设非完整性约束的杆臂为 0。

根据上述场景描述，将表 3-1 中根据实际惯导系统设定的相关参数（包括导航级和战术级两套惯导参数），带入 2.4.5 节的纯惯导误差微分方程中，其影响小于传感器误差一个数量级的误差将被当作次要误差项，在分析中不予考虑。导航级惯导和战术级惯导参数带入后简化整理，纯惯导的误差微分方程均为：

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{r}_N &= \delta v_N \\
 \delta \dot{r}_E &= \delta v_E \\
 \delta \dot{r}_D &= \delta v_D \\
 \delta \dot{v}_N &= -f_D \phi_{pitch} + \delta f_N \\
 \delta \dot{v}_E &= f_D \phi_{roll} + \delta f_E \\
 \delta \dot{v}_D &= \delta f_D \\
 \dot{\phi}_{roll} &= -\delta \omega_{ib,N}^n \\
 \dot{\phi}_{pitch} &= -\delta \omega_{ib,E}^n \\
 \dot{\phi}_{yaw} &= -\delta \omega_{ib,D}^n
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

表 3-1 纯惯导误差微分方程简化情景参数

参数	数值/条件	说明
概略位置	$\varphi = 30deg, \lambda = 114deg, h = 20m$	对公式简化影响较小
位置误差 (cm)	$\delta r_N = 1, \delta r_E = 1, \delta r_D = 2$	由 GNSS 等绝对测量决定
运动速度 (m/s)	$v_N = 5, v_E = 5, v_D = 0.15$	$v_E$ 可设置为 0
速度误差 (m/s)	$\delta v_N = 0.002, \delta v_E = 0.002, \delta v_D = 0.002$	导航级惯导
	$\delta v_N = 0.02, \delta v_E = 0.02, \delta v_D = 0.02$	战术级惯导
姿态误差 (deg)	$\phi_{roll} = 0.003, \phi_{pitch} = 0.003, \phi_{yaw} = 0.005$	导航级惯导
	$\phi_{roll} = 0.005, \phi_{pitch} = 0.005, \phi_{yaw} = 0.008$	战术级惯导
陀螺零偏 (deg/h)	$\delta \omega_{ib}^b = 0.01$	导航级惯导，三轴一致
	$\delta \omega_{ib}^b = 0.1$	战术级惯导，三轴一致
加速度计零偏 (mGal)	$\delta f^b = 10$	导航级惯导
	$\delta f^b = 300$	战术级惯导
当地重力	$g_l = 9.78 m/s^2$	
加速度	0	匀速直线运动

从式(3.12)可以看出，对于高精度惯导来说，姿态误差造成的重力投影误差可能比加速度计误差大，在速度误差微分方程中往往不能忽略。对于导航级以下精度等级的惯导来说，其传感器误差占据主导地位，但仍可采用同样的简化公式。简化后各通道之间没有了耦合性，可以分别对单个通道进行分析。

根据前面的运动轨迹假设,当 A-INS 向正北匀速直线运动时,北向位置主要影响轨道不平顺的里程定位,保证厘米级精度即可且容易实现,因而不对北向位置误差进行分析。由于直线轨道的设计正矢(理论值)均为 0,那么水平正矢误差则为东向位置误差,高低正矢误差则为高程分量误差。因此后面将针对这一场景重点分析 A-INS 东向位置和高程最优估值误差的随机过程特性和轨道不平顺的测量精度。

### 3.2.3 连续时间卡尔曼滤波

从式(3.12)可以看出,针对铁路轨道几何状态测量这一应用进行简化后, A-INS 组合导航间接卡尔曼滤波器可看作线性时不变系统。根据线性系统理论,对连续时间线性时不变系统的描述方法有:(1)输入-输出关系法(即用传递函数或单位冲激响应描述);(2)常微分方程法;(3)状态变量法(朱华 1990)。因此,建立 A-INS 测量误差传播模型的核心在于找到 A-INS 组合导航系统的传递函数,确定系统输入-输出之间的函数关系,关键在于分析组合导航卡尔曼滤波器的系统特性。

第二章中介绍了连续时间卡尔曼滤波的基本方程。如果被研究的系统为时不变系统(即  $\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbf{G}(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$  为常矩阵),且系统激励噪声和观测噪声均为平稳随机过程(有  $\mathbf{Q}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$  为常矩阵),则卡尔曼滤波有可能达到稳态,该状态下  $\dot{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{0}$ (即  $\mathbf{P}$  阵为常值矩阵)。此时,黎卡蒂方程(2.87)满足以下代数关系式:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}_c^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

此时,最优滤波也是时不变的:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}_c^{-1}[\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (3.14)$$

易知,当卡尔曼滤波达到稳态时,增益矩阵为常值矩阵,根据(2.88)可得:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{H}]\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) \quad (3.15)$$

对式(3.15)进行拉普拉斯变换(忽略初始条件的影响),得

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{H}]\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{K}\mathbf{z}(s) \quad (3.16)$$

求解系统状态量估值为:

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{H})^{-1} \mathbf{K} \right] \mathbf{z}(s) \quad (3.17)$$

系统输入为  $\mathbf{z}(s)$ ,系统的传递函数为  $(s\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{H})^{-1} \mathbf{K}$ 。此时稳态卡尔曼滤波算法等价于维纳滤波(Maybeck 1982)。从组合导航的观测方程(2.110)(2.116)(2.123)可以看出  $\mathbf{z}(s)$  是惯导器件误差和观测噪声的综合反映。根据上述传递函数,在给定惯导器件误差和观测噪声随机过程描述时,可以分析系统状态  $\hat{\mathbf{x}}$  的误差的随机过程特性。

式(3.13)有解及 A-INS 组合导航卡尔曼滤波达到稳态的前提是状态量具有可观测性,导航精度收敛。在我们的 A-INS 轨检系统中,轨检小车上的惯导辅助信息包括连续的 GNSS 位置,高精度里程计信息和非完整性约束,因此组合导航卡尔曼滤波的各项误差

量均具有可观测性，卡尔曼滤波能够达到稳态。

### 3.2.4 高程通道误差模型

A-INS 误差传播模型描述的是 A-INS 测量误差与各误差源（包括惯性传感器误差和量测噪声）之间的函数关系，是测量误差定量分析及精度评估的前提。下面将先从 A-INS 组合导航系统高程通道的简化模型开始阐述建立误差传播模型的方法。在此基础上，针对实际情况对惯性传感器误差和观测噪声模型进行细化，得到 A-INS 组合导航高程通道和水平通道误差传递的完备模型。

#### 3.2.4.1 简化模型(Maybeck 1982)

在该简化模型中，假设垂向加速度计误差仅为白噪声过程  $w_{a,D}(t)$ ，与连续的 GNSS 高程观测值进行组合解算。

$$E\{w_{a,D}(t)w_{a,D}^T(t+\tau)\} = Q\delta(\tau) \quad (3.18)$$

带有误差的垂向加速度经过两次时间积分得到惯导的高程  $h_{INS}$ 。GNSS 提供连续的高程观测值  $h_{GPS}$ ，量测误差建模为白噪声过程  $n_{r,h}(t)$ ：

$$E\{n_{r,h}(t)n_{r,h}^T(t+\tau)\} = R_c(t)\delta(\tau) \quad (3.19)$$

$R_c$  为连续时间观测噪声的方差强度（下标 ‘c’ 强调连续时间； $R_c$  的单位为  $m^2/s$ ，因为  $n_{r,h}$  的单位为  $m$ ，而  $\delta(\tau)$  的单位为时间的倒数）。由加速度计测量值推算的高程与 GNSS 高程观测值进行组合解算，得到高程的最优估值。定义两个误差状态变量：

$$\delta h_{INS}(t) = h_{INS}(t) - h_{real}(t) \quad (3.20)$$

$$\delta v_{INS,D}(t) = v_{INS,D}(t) - v_{real,D}(t) \quad (3.21)$$

式中  $h_{INS}$  为惯导推算的高程， $h_{real}$  为惯导的实际高程， $\delta h_{INS}$  为惯导推算高程的误差，根据 2.4.5.1 节的定义有  $\delta h_{INS} = -\delta r_{INS,D}$ 。 $v_{INS,D}$  为 INS 推算的惯导垂向速度， $v_{real,D}$  为惯导的实际垂向速度，则  $\delta v_{INS,D}$  为惯导推算速度的误差。

组合导航卡尔曼滤波可以得到惯导高程、速度及其误差的最优估值：

$$\widehat{\delta h}_{INS}(t) = h_{INS}(t) - \hat{h}_{est}(t) \quad (3.22)$$

$$\widehat{\delta v}_{INS,D}(t) = v_{INS,D}(t) - \hat{v}_{est,D}(t) \quad (3.23)$$

式中  $\hat{h}_{est}$  为惯导高程的最优估值； $\widehat{\delta h}_{INS}$  为惯导高程误差的最优估值； $\hat{v}_{est,D}$  为惯导速度最优估值； $\widehat{\delta v}_{INS,D}$  为惯导速度误差的最优估值。组合导航卡尔曼滤波器的观测量为惯导推算的高程与 GNSS 高程观测值之差：

$$\begin{aligned} z_h(t) &= h_{INS}(t) - h_{GPS}(t) \\ &= [h_{real}(t) + \delta h_{INS}(t)] - [h_{real}(t) - n_{r,h}(t)] \\ &= \delta h_{INS}(t) + n_{r,h}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

系统状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta h}_{INS}(t) \\ \dot{\delta v}_{INS,D}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_{INS}(t) \\ \delta v_{INS,D}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{a,D}(t) \quad (3.25)$$

观测方程(3.24)可写为:

$$z_h(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_{INS}(t) \\ \delta v_{INS,D}(t) \end{bmatrix} + n_{r,h}(t) \quad (3.26)$$

给定系统的初始状态: 状态变量  $\mathbf{x}(t_0)$  建模为高斯随机变量, 其期望为  $\mathbf{0}$ , 方差协方差阵为  $\mathbf{P}_0$ , 则可通过卡尔曼滤波得到状态变量的最优估计。针对这一问题的连续时间卡尔曼滤波的方程 (参考式(2.86)~(2.88),) 为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\delta h}}_{INS}(t) \\ \dot{\hat{\delta v}}_{INS,D}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta h}_{INS}(t) \\ \hat{\delta v}_{INS,D}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_c} [z_h(t) - \hat{\delta h}_{INS}(t)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta h}_{INS}(t) \\ \hat{\delta v}_{INS,D}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}/R_c \\ P_{21}/R_c \end{bmatrix} [z_h(t) - \hat{\delta h}_{INS}(t)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

方差协方差阵  $\mathbf{P}$  的微分方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{11} & \dot{P}_{12} \\ \dot{P}_{21} & \dot{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{12} & -P_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{12} & 0 \\ -P_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11}^2/R_c & P_{11}P_{12}/R_c \\ P_{11}P_{12}/R_c & P_{12}^2/R_c \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

给定滤波的初始条件  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{P}_0$ , 则可得到状态量在任意时刻的最优估值。通过求解黎卡蒂方程(3.28)则可以完成  $\mathbf{P}$  阵的更新。式(3.25)描述的是一个线性定常系统, 系统噪声和观测噪声均为平稳随机过程, 则当系统达到稳态时  $\mathbf{P}$  阵满足式(3.13), 解黎卡蒂方程(3.28)得到  $\mathbf{P}$  阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}Q^{1/4}R_c^{3/4} & -Q^{1/2}R_c^{1/2} \\ -Q^{1/2}R_c^{1/2} & \sqrt{2}Q^{3/4}R_c^{1/4} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

增益矩阵  $\mathbf{K}$  为:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(Q/R_c)^{1/4} \\ -(Q/R_c)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

上述连续时间卡尔曼滤波解算过程可表示为图 3-4 所示的框图, 以直观形象地表现高程通道输入和输出变量之间的关系。

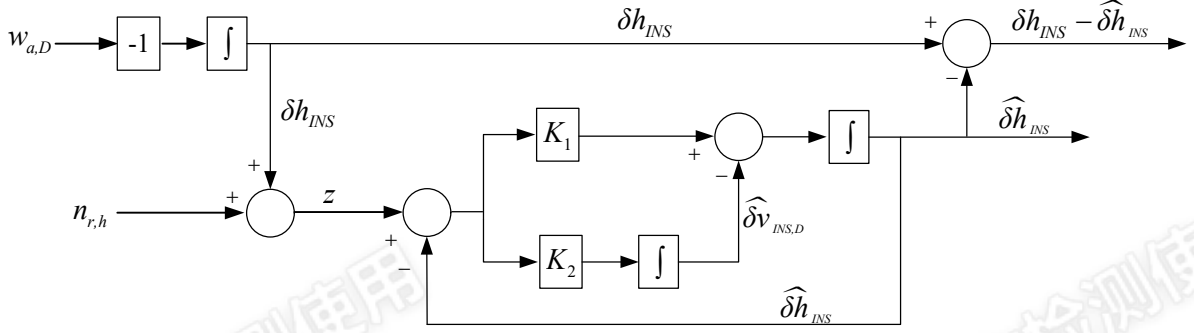


图 3-4 高程通道（简化模型）的连续时间卡尔曼滤波框图

从图 3-4 可以看出，上述的连续时间卡尔曼滤波解算过程可以看成是一个线性系统，输入为系统噪声  $w_{a,D}$  和观测噪声  $n_{r,h}$ ，系统输出（如状态量的最优估值误差）也是随机过程。图 3-4 采用了前馈式卡尔曼滤波表达，前馈卡尔曼滤波与反馈式卡尔曼滤波本质上是等价的(秦永元, 张洪钺 et al. 2015)。

根据式(3.5)可知，高程最优估值的误差为：

$$\delta \hat{h}_{INS}(t) = \delta h_{INS}(t) - \delta \hat{h}_{INS}(t) \quad (3.31)$$

根据 3.2 节的描述可知，只要掌握了  $\delta h_{INS}(t)$  和  $\delta \hat{h}_{INS}(t)$  的随机过程特性，则可分析高程测量值最终估计误差  $\delta \hat{h}_{INS}(t)$  的特性及评估系统测量精度。根据图 3-4 可写出该线性系统的传递函数，若已知系统的激励噪声特性，则系统输出  $\delta \hat{h}_{INS}(t)$  的随机过程特性可分析。

对微分方程式(3.27)进行拉普拉斯变换，可得：

$$\delta \hat{h}_{INS}(s) = \frac{sK_1 - K_2}{s^2 + sK_1 - K_2} n_{r,h}(s) - \frac{sK_1 - K_2}{s^2 (s^2 + sK_1 - K_2)} w_{a,D}(s) \quad (3.32)$$

$$\delta \hat{v}_{INS,D}(s) = \frac{sK_2}{s^2 + sK_1 - K_2} n_{r,h}(s) - \frac{K_2}{s(s^2 + sK_1 - K_2)} w_{a,D}(s) \quad (3.33)$$

对(3.25)进行拉普拉斯变换，求解微分方程可得：

$$\delta h_{INS}(s) = -\frac{w_{a,D}(s)}{s^2} \quad (3.34)$$

$$\delta v_{INS,D}(s) = \frac{w_{a,D}(s)}{s} \quad (3.35)$$

式(3.32)减式(3.34)可得：

$$\delta \hat{h}_{INS}(s) = \frac{sK_1 - K_2}{s^2 + sK_1 - K_2} n_{r,h}(s) + \frac{1}{s^2 + sK_1 - K_2} w_{a,D}(s) \quad (3.36)$$

式(3.36)即高程最优估值的误差与系统噪声和 GNSS 位置量测噪声在拉普拉斯域的函数关系式，式(3.36)中  $K_1, K_2$  通过式(3.30)计算得到。这样就建立了 A-INS 组合导航简化高程通道的误差传播模型，当连续时间卡尔曼滤波达到稳态时，将其当作线性系统进行研究，建立误差传播模型即找到该线性系统的传递函数。下面将基于同样的思路推导



A-INS 高程通道和水平通道的完备误差传播模型。

### 3.2.4.2 增广模型

实际的垂向加速度计误差不应简单建模为白噪声过程,还包含加速度计标定后残余的加速度计零偏、比例因子误差和交轴耦合。但在轨道测量中 INS 的动态很小,比例因子误差和交轴耦合这类动态误差较零偏而言是次要误差项。在误差传播模型理论分析中可以只考虑加速度计的零偏误差和白噪声过程,将加速度计零偏误差建模为一阶高斯马尔可夫过程,增广至卡尔曼滤波状态向量中。

引入非完整性约束作为虚拟速度观测值加入到 A-INS 组合导航的观测量中,但此时需要考虑俯仰角误差的影响,将其增广到系统状态向量中,同时加入俯仰陀螺的零偏误差。因此,根据式 (2.96) A-INS 组合导航解算高程通道的状态向量和系统状态方程为:

$$\mathbf{x}_D = [\delta h_{INS} \quad \delta v_{INS,D} \quad \phi_{pitch} \quad b_{g,E} \quad b_{a,D}]^T \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_D(t) = \mathbf{F}_D(t) \mathbf{x}_D(t) + \mathbf{G}_D(t) \mathbf{w}_D(t) \quad (3.38)$$

其中,  $\mathbf{w}_D(t)$  为系统噪声,均为高斯白噪声:

$$\mathbf{w}_D = [0 \quad w_{a,D} \quad w_{g,E} \quad w_{gb,E} \quad w_{ab,D}]^T \quad (3.39)$$

$$E\{\mathbf{w}_D(t) \mathbf{w}_D^T(t+\tau)\} = \mathbf{Q}_D(t) \delta(\tau) \quad (3.40)$$

式中,

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/T_{gb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_{ab} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$\delta h_{INS}$  为惯导机械编排推算高程的实际误差,定义为(3.20)。 $\delta v_{INS,D}$  为惯导推算的垂向速度的实际误差,定义为(3.21)。 $b_{g,E}$  为“东向”陀螺(即俯仰陀螺)残余零偏,即零偏误差,根据前面假设的运动轨迹, $b$ 系, $v$ 系和 $n$ 系重合,则 $b_{g,E} = b_{g,y}$ ,为方便阅读,此处采用 $b_{g,E}$ 。 $b_{a,D}$ 为垂向加表零偏,其含义等同于 $b_{a,z}$ 。传感器残余零偏建模为一阶高斯马尔可夫过程,如式(2.97);俯仰角误差 $\phi_{pitch}$ 来自于东向陀螺零偏 $b_{g,E}$ 和东向陀螺测量白噪声 $w_{g,E}$ 。东向陀螺零偏,建模为一阶高斯马尔可夫过程,其相关时间为 $T_{gb}$ ,驱动白噪声为 $w_{gb,E}$ 。垂向加表零偏,建模为一阶高斯马尔可夫过程,相关时间为 $T_{ab}$ ,驱动白噪声为 $w_{ab,D}$ 。

卡尔曼滤波的观测量为惯导推算的高程与 GNSS 高程测量值之差及非完整性约束所加的虚拟速度误差。根据前面所述的简化条件,GNSS 杆臂,非完整性约束虚拟速度

传感器的杆臂设置为0。则根据式(2.123),非完整性约束的垂向速度观测方程可简化为:

$$z_{v,D} = \delta v_D + v_E \phi_{roll} - v_N \phi_{pitch} + n_{vnhc,D} \quad (3.42)$$

式中  $z_{v,D}$  表示非完整性约束在  $v$  系下的垂向速度误差,由于  $v$  系与  $n$  系重合,故表示为  $z_{v,D}$ ,  $n_{vnhc,D}$  为非完整性约束速度观测值的观测噪声。由于运动轨迹假设为沿正北方向做匀速直线运动,则东向速度为零,式(3.42)可进一步简化为:

$$z_{v,D} = \delta v_D - v_N \phi_{pitch} + n_{vnhc,D} \quad (3.43)$$

则 A-INS 组合导航的观测方程为:

$$\mathbf{z}_D = \mathbf{H}_D \mathbf{x}_D + \mathbf{n}_D \quad (3.44)$$

$$\mathbf{z}_D = \begin{bmatrix} z_h \\ z_{v,D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -v_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_D = \begin{bmatrix} n_{r,h} \\ n_{vnhc,D} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$E\{\mathbf{n}_D(t) \mathbf{n}_D^T(t+\tau)\} = \mathbf{R}_D \delta(\tau) \quad (3.46)$$

系统的初始条件:状态变量  $\mathbf{x}(t_0)$  假设(建模)为高斯随机变量,均值为  $\mathbf{0}$ ,方差协方差阵为  $\mathbf{P}_0$ 。针对这一问题的连续时间卡尔曼滤波方程为:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_D(t) = \mathbf{F}_D(t) \hat{\mathbf{x}}_D(t) + \mathbf{K}_D(t) [\mathbf{z}_D(t) - \mathbf{H}_D(t) \hat{\mathbf{x}}_D(t)] \quad (3.47)$$

式中,

$$\hat{\mathbf{x}}_D = \begin{bmatrix} \hat{\delta h}_{INS} & \hat{\delta v}_{INS,D} & \hat{\phi}_{pitch} & \hat{b}_{g,E} & \hat{b}_{a,D} \end{bmatrix}^T \quad (3.48)$$

由式(3.41)和(3.45)可知,  $\mathbf{F}_D(t)$ ,  $\mathbf{G}_D(t)$ ,  $\mathbf{H}_D(t)$  均为常值矩阵(假设北向速度  $v_N$  为常值);且  $\mathbf{R}_D$  阵和  $\mathbf{Q}_D$  阵均为常值对角阵。高程通道的卡尔曼滤波可以达到稳态,此时  $\mathbf{P}$  阵和增益矩阵  $\mathbf{K}$  也变成常值矩阵; $\mathbf{P}$  阵通过求解黎卡蒂方程(3.13)得到,增益矩阵  $\mathbf{K}$  可由(2.88)计算得到,增益矩阵为  $5 \times 2$  的矩阵,其第  $i$  行第  $j$  列的元素记为  $K_{ij}$ 。

对式(3.38)进行拉普拉斯变换可得方程在  $s$  域的解:

$$\mathbf{x}_D(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F}_D)^{-1} \mathbf{G}_D \mathbf{w}_D(s) \quad (3.49)$$

展开可得:

$$\delta h_{INS}(s) = -\frac{1}{s^2} w_{a,D}(s) - \frac{1}{s^2(s+\gamma_{ab})} w_{ab,D}(s) \quad (3.50)$$

$$\delta v_{INS,D}(s) = \frac{1}{s} w_{a,D}(s) + \frac{1}{s(s+\gamma_{ab})} w_{ab,D}(s) \quad (3.51)$$

$$\phi_{pitch}(s) = \frac{1}{s} w_{g,E}(s) - \frac{1}{s(s+\gamma_{gb})} w_{gb,E}(s) \quad (3.52)$$

$$b_{a,D}(s) = \frac{1}{s+\gamma_{ab}} w_{ab,D}(s) \quad (3.53)$$

$$b_{g,E}(s) = \frac{1}{s+\gamma_{gb}} w_{gb,E}(s) \quad (3.54)$$

式中,  $\gamma_{ab} = 1/T_{ab}$ ,  $\gamma_{gb} = 1/T_{gb}$ 。对式(3.44)进行拉普拉斯变换,并将(3.50)~(3.54)中的相

关项带入展开, 可得:

$$z_h(s) = -\frac{1}{s^2} w_{a,D}(s) - \frac{1}{s^2(s+\gamma_{ab})} w_{ab,D}(s) + n_{r,h}(s) \quad (3.55)$$

$$z_{v,D}(s) = \frac{1}{s} w_{a,D}(s) - \frac{v_N}{s} w_{g,E}(s) + \frac{1}{s(s+\gamma_{ab})} w_{ab,D}(s) + \frac{v_N}{s(s+\gamma_{gb})} w_{gb,E}(s) + n_{vnhc,D}(s) \quad (3.56)$$

根据式(3.47)可得:

$$\hat{\mathbf{x}}_D(s) = \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{F}_D + \mathbf{K}_D \mathbf{H}_D)^{-1} \mathbf{K}_D \right] \mathbf{z}_D(s) \quad (3.57)$$

将式(3.55)和(3.56)带入(3.57)可得到  $\delta \hat{\mathbf{h}}_{INS}(s)$  的表达式 ( $\delta \hat{\mathbf{h}}_{INS}(s)$  是误差状态量  $\hat{\mathbf{x}}_D(s)$  中的高程误差分量), 表示为  $\mathbf{w}(s)$  的线性函数。结合式(3.50)则可得到位置估值误差  $\delta \hat{\mathbf{h}}_{INS}(s)$  的表达式, 也是  $\mathbf{w}(s)$  的线性函数, 记作:

$$\delta \hat{\mathbf{h}}_{INS}(s) = H_{h\_waD} w_{a,D}(s) + H_{h\_wgE} w_{g,E}(s) + H_{h\_wgbE} w_{gb,E}(s) + H_{h\_wabD} w_{ab,D}(s) + H_{h\_nrh} n_{r,h}(s) + H_{h\_vnhcD} n_{vnhc,D}(s) \quad (3.58)$$

式中  $H_{h\_waD}$ ,  $H_{h\_wgE}$ ,  $H_{h\_wgbE}$ ,  $H_{h\_wabD}$ ,  $H_{h\_nrh}$ ,  $H_{h\_vnhcD}$  为各误差项的系数表达式, 具体可通过 MATLAB 软件的符号运算求解得到。式(3.58)即 A-INS 组合导航高程通道完备的误差传播模型。

### 3.2.5 水平通道误差模型

根据前面的运动轨迹假设, A-INS 轨检小车沿正北方向做匀速直线运动。北向位置主要影响轨道不平顺的里程定位, 保证厘米级精度即可。因此, 水平方向只研究东向位置误差传播模型及其随机过程特性。水平通道的误差分析, 除了惯导的东向位置误差和东向速度误差外还需考虑横滚角误差, 因为横滚角误差导致重力在东西方向上的投影误差; 同时考虑非完整性约束更新, 须将航向角误差增广到状态量中。为此, 横滚陀螺 (即北向陀螺) 零偏、航向陀螺零偏和东向加速度计零偏也必须增广到卡尔曼滤波状态向量中。这样, 水平通道的状态向量和系统状态方程为:

$$\mathbf{x}_E = \left[ \delta r_{INS,E} \quad \delta v_{INS,E} \quad \phi_{roll} \quad \phi_{yaw} \quad b_{g,N} \quad b_{g,D} \quad b_{a,E} \right]^T \quad (3.59)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{F}_E(t) \mathbf{x}_E(t) + \mathbf{G}_E(t) \mathbf{w}_E(t) \quad (3.60)$$

式中  $\mathbf{w}_E(t)$  为系统噪声, 均假设为高斯白噪声:

$$\mathbf{w}_E = \left[ 0 \quad w_{a,E} \quad w_{g,N} \quad w_{g,D} \quad w_{gb,N} \quad w_{gb,D} \quad w_{ab,E} \right]^T \quad (3.61)$$

$$E \{ \mathbf{w}_E(t) \mathbf{w}_E^T(t+\tau) \} = \mathbf{Q}_E(t) \delta(\tau) \quad (3.62)$$

式中,

$$\mathbf{F}_E(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_D & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_{gb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_{gb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_{ab} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_E(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

式中  $\mathbf{I}_{6 \times 6}$  表示  $6 \times 6$  的单位阵。 $\delta r_{INS,E}$  为惯导机械编排的东向位置误差，定义参考(3.20)。 $\delta v_{INS,E}$  为惯导机械编排的东向速度误差，定义参考(3.21)。 $\phi_{roll}$ ， $\phi_{yaw}$  分别表示横滚角误差和航向角误差。 $b_{g,N}$  为北向陀螺零偏误差，建模为一阶高斯马尔科夫过程，其相关时间为  $T_{gb}$ ，驱动白噪声过程为  $w_{gb,N}$ 。 $b_{g,D}$  为航向陀螺零偏误差，建模为一阶高斯马尔科夫过程，其相关时间为  $T_{gb}$ ，驱动白噪声过程为  $w_{gb,D}$ 。 $b_{a,E}$  为东向加速度计零偏误差，建模为一阶高斯马尔科夫过程，其相关时间为  $T_{ab}$ ，驱动白噪声过程为  $w_{ab,E}$ 。 $w_{a,E}$  为东向加速度计白噪声； $w_{g,N}$  为北向陀螺白噪声； $w_{g,D}$  为航向陀螺白噪声。

组合导航卡尔曼滤波器中的观测量为惯导推算的位置与 GNSS 位置之差在东向的投影，以及惯导推算的横向速度与非完整性约束零观测之差。根据前面的简化假设，GNSS 杆臂，非完整性约束虚拟速度传感器的杆臂设置为 0，非完整性约束的速度约束即惯导的横向速度为零。根据式(2.123)，非完整性约束的东向速度观测方程可简化为：

$$z_{vnhc,E} = \delta v_E + v_N \phi_{yaw} - v_D \phi_{roll} + n_{vnhc,E} \quad (3.64)$$

根据前面的运动场景假设有垂向速度为 0，则上式可以简化为：

$$z_{vnhc,E} = \delta v_E + v_N \phi_{yaw} + n_{vnhc,E} \quad (3.65)$$

结合 GNSS 位置观测值（其误差建模为高斯白噪声  $n_{r,E}$ ），量测方程为：

$$\mathbf{z}_E = \mathbf{H}_E \mathbf{x}_E + \mathbf{n}_E \quad (3.66)$$

$$E\{\mathbf{n}_E(t) \mathbf{n}_E^T(t+\tau)\} = \mathbf{R}_E \delta(\tau) \quad (3.67)$$

式中，

$$\mathbf{z}_E = \begin{bmatrix} z_{r,E} \\ z_{vnhc,E} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v_N & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_E = \begin{bmatrix} n_{r,E} \\ n_{vnhc,E} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

系统的初始条件：状态变量  $\mathbf{x}(t_0)$  假设（建模）为高斯随机变量，均值为  $\mathbf{0}$ ，方差协方差阵为  $\mathbf{P}_0$ 。针对这一问题的连续时间卡尔曼滤波方程为：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_E(t) = \mathbf{F}_E(t) \hat{\mathbf{x}}_E(t) + \mathbf{K}_E(t) [\mathbf{z}_E(t) - \mathbf{H}_E(t) \hat{\mathbf{x}}_E(t)] \quad (3.69)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_E = \begin{bmatrix} \hat{\delta r}_{INS,E} & \hat{\delta v}_{INS,E} & \hat{\phi}_{roll} & \hat{\phi}_{yaw} & \hat{b}_{g,N} & \hat{b}_{g,D} & \hat{b}_{a,E} \end{bmatrix}^T \quad (3.70)$$

式中， $\hat{\delta r}_{INS,E}$  为惯导东向位置误差的估值， $\hat{\delta v}_{INS,E}$  为惯导东向速度误差估值，其余类同。由式(3.63)和(3.68)可知， $\mathbf{F}_E$ ， $\mathbf{G}_E$ ， $\mathbf{H}_E$  均为常值矩阵（根据假设的运动场景，北向速度  $v_N$  为常值）；且  $\mathbf{R}$  阵和  $\mathbf{Q}$  阵均为常值矩阵。由于使用了非完整性约束，航向角也

具有可观测性，A-INS 组合导航卡尔曼滤波能够达到稳态。此时， $\mathbf{P}$  阵和增益矩阵  $\mathbf{K}$  也为常值矩阵； $\mathbf{P}$  阵通过求解黎卡蒂方程(3.13)得到，增益矩阵  $\mathbf{K}$  可由(2.88)计算得到。增益矩阵为  $7 \times 2$  的矩阵，其第  $i$  行第  $j$  列的元素记为  $K_{ij}$ 。

对式(3.60)进行拉普拉斯变换可得方程在  $s$  域的解：

$$\mathbf{x}_E(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F}_E)^{-1} \mathbf{G}_E \mathbf{w}_E(s) \quad (3.71)$$

展开为：

$$\delta r_E(s) = \frac{1}{s^2} w_{a,E}(s) + \frac{f_D}{s^3} w_{g,N}(s) - \frac{f_D}{s^3(s + \gamma_{gb})} w_{gb,N}(s) + \frac{1}{s^2(s + \gamma_{ab})} w_{ab,E}(s) \quad (3.72)$$

$$\delta v_E(s) = \frac{1}{s} w_{a,E}(s) + \frac{f_D}{s^2} w_{g,N}(s) - \frac{f_D}{s^2(s + \gamma_{gb})} w_{gb,N}(s) + \frac{1}{s(s + \gamma_{ab})} w_{ab,E}(s) \quad (3.73)$$

$$\phi_{roll}(s) = \frac{1}{s} w_{g,N}(s) - \frac{1}{s(s + \gamma_{gb})} w_{gb,N}(s) \quad (3.74)$$

$$\phi_{yaw}(s) = \frac{1}{s} w_{g,D}(s) - \frac{1}{s(s + \gamma_{gb})} w_{gb,D}(s) \quad (3.75)$$

$$b_{g,N}(s) = \frac{1}{s + \gamma_{gb}} w_{gb,N}(s) \quad (3.76)$$

$$b_{g,D}(s) = \frac{1}{s + \gamma_{gb}} w_{gb,D}(s) \quad (3.77)$$

$$b_{a,E}(s) = \frac{1}{s + \gamma_{ab}} w_{ab,E}(s) \quad (3.78)$$

$\delta r_E(s)$  为惯导东向位置误差在  $s$  域的表达式；同理对(3.66)进行拉普拉斯变换，得：

$$z_{r,E} = \frac{1}{s^2} w_{a,E}(s) + \frac{f_D}{s^3} w_{g,N}(s) - \frac{f_D}{s^3(s + \gamma_{gb})} w_{gb,N}(s) + \frac{1}{s^2(s + \gamma_{ab})} w_{ab,E} + n_{r,E}(s) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} z_{v,E}(s) = & \frac{1}{s} w_{a,E}(s) + \frac{f_D}{s^2} w_{g,N}(s) + \frac{v_N}{s} w_{g,D}(s) - \frac{f_D}{s^2(s + \gamma_{gb})} w_{gb,N}(s) \\ & - \frac{v_N}{s(s + \gamma_{gb})} w_{gb,D}(s) + \frac{1}{s(s + \gamma_{ab})} w_{ab,E}(s) + n_{vnhc,E} \end{aligned} \quad (3.80)$$

根据式(3.69)可得：

$$\hat{\mathbf{x}}_E(s) = \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{F}_E + \mathbf{K}_E \mathbf{H}_E)^{-1} \mathbf{K}_E \right] \mathbf{z}_E(s) \quad (3.81)$$

将式(3.79)和(3.80)带入(3.81)即可得到  $\widehat{\delta r}_{INS,E}(s)$  的表达式。结合式(3.72)可得到  $\widehat{\delta r}_{INS,E}(s)$  的具体表达式。

$$\begin{aligned} \widehat{\delta r}_{INS,E}(s) = & H_{h\_waE} w_{a,E}(s) + H_{h\_wgN} w_{g,N}(s) + H_{h\_wgD} w_{g,D}(s) + H_{h\_wgbN} w_{gb,N}(s) \\ & + H_{h\_wgbD} w_{gb,D}(s) + H_{h\_wabE} w_{ab,E}(s) + H_{h\_nrE} n_{r,E}(s) + H_{h\_vnhcE} n_{vnhc,E}(s) \end{aligned} \quad (3.82)$$

式中  $H_{h\_waE}$ ， $H_{h\_wgN}$ ， $H_{h\_wgD}$ ， $H_{h\_wgbN}$ ， $H_{h\_wgbD}$ ， $H_{h\_wabE}$ ， $H_{h\_nrE}$ ， $H_{h\_vnhcE}$  为各误

差项的系数表达式，具体可通过 MATLAB 软件的符号运算求解得到。式(3.82)即 A-INS 组合导航水平通道完备的误差传播模型。

至此，针对直线运动轨迹的 A-INS 组合导航误差传播模型构建完毕。我们首先从轨道不平顺参数的定义出发，明确了 A-INS 误差传播模型的分析对象，即导航参数最优估值的误差。然后，针对铁路轨道几何状态测量这一特殊应用场景，对惯导误差微分方程进行了简化，得到了解耦的误差微分方程组。在此基础上，分别对轨道不平顺测量所关注的高程通道和水平通道进行误差建模，得到了拉普拉斯域内 A-INS 组合导航参数最优估值的误差表达式。该表达式描述了导航误差与各误差源之间的函数关系，也即建立了误差传播模型。

后续将基于建立的误差传播模型研究 A-INS 轨道几何状态测量误差的随机过程特性，并对误差做定量分析。具体的研究思路如图 3-5 所示。

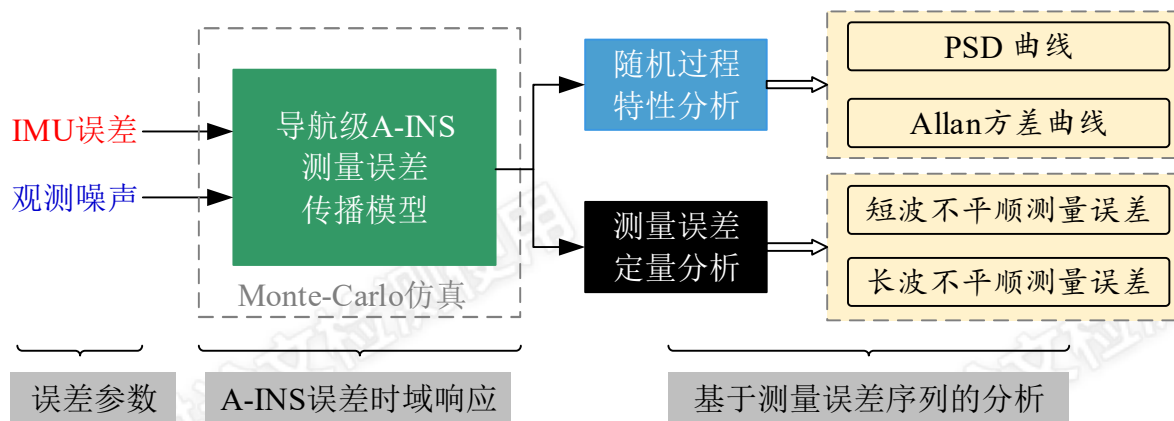


图 3-5 基于误差传播模型的 A-INS 测量误差定量分析研究思路

### 3.3 A-INS 测量误差随机特性分析

本章 3.2 节已建立了 A-INS 组合导航高程通道和水平通道完备的误差传播模型，得到了系统在拉普拉斯域的传递函数。本节的核心任务是在该误差传播模型基础上，根据系统输入随机信号的随机特性研究 A-INS 系统输出（主要是位置误差）的随机过程特性。

#### 3.3.1 A-INS 测量误差分析方法

一般的，对于线性时不变系统，在确定性信号输入的情况下，我们通常研究其响应或输出的明确表达式。但对于随机信号输入的问题，除了确定性随机信号输入的特殊情况外，要想得到输出的明确表达式是不可能的(朱华 1990)。根据前面的分析可知，A-INS 组合导航系统的输入为白噪声过程，系统输出也必然是一个随机过程，且无法得到对应的时域解析表达式。本节将用随机信号分析的方法对 A-INS 组合导航误差这一随机过程的特性进行分析和讨论。

根据线性系统理论，一个宽平稳随机信号（例如白噪声过程）输入到线性时不变稳定系统时，其输出随机信号也是宽平稳的。实际上，还可证明若输入随机过程是严平稳的，则系统的输出也将是严平稳的。若输入是各态遍历过程，则输出也具有各态遍历性。当输入为高斯过程时输出也是高斯过程(朱华 1990)。后续分析是在此基础上进行的。

根据前面的分析，A-INS 组合导航系统的输入为白噪声过程（包括传感器噪声，量测噪声和零偏类误差的驱动白噪声）。直接将 3.2 节建立的误差传播模型转换为时域模型（如拉普拉斯逆变换）无法得到系统输出的时域解析表达式。因此，采用蒙特卡洛仿真的方法来获取系统的时域输出：根据系统传递函数，采用蒙特卡洛方法仿真白噪声过程，使其经过这一线性时不变系统得到系统输出，即测量误差的样本。再对系统的时域输出样本进行分析，研究其随机过程特性。

白噪声过程是具有均匀功率谱密度，且在概率上服从正态分布（或称为高斯分布）的平稳随机过程，具有各态遍历性。白噪声过程经过 A-INS 组合导航连续时间卡尔曼滤波这一线性时不变系统，其输出的导航误差也是具有各态遍历性的平稳随机过程。因此，只要仿真时间足够长的白噪声序列经过这一线性系统，则系统的单个输出样本也能够充分反映 A-INS 的导航误差特性，研究该误差序列即可得到我们最终需要的 A-INS 的轨道不平顺测量精度。

A-INS 组合导航连续时间间接卡尔曼滤波为一个多输入多输出的线性时不变系统。表 3-1 给出了一套典型的导航级惯导误差参数，根据这些参数可以仿真对应的白噪声序列，作为系统输入。

根据表 3-1 中的白噪声和一阶高斯马尔可夫过程驱动白噪声参数，用 MATLAB 软件(R2013b)的 *randn* 函数仿真得到对应的白噪声序列，采样率 200 Hz，仿真时长 12000 s。根据 3.3.1 和 3.3.2 小节得到的传递函数，及运动状态参数（如小车行进速度），用 MATLAB 软件的 *tf* 和 *lsim* 函数可以得到动态系统对于白噪声激励的时间响应，即系统输出的时间序列。根据前面的运动场景条件假设，搭载惯导的轨检小车做匀速直线运动，则仿真的时间序列也可转换到里程维度上进行分析。

表 3-2 导航级 A-INS 组合导航系统误差参数

惯性传感器			
	参数	符号	数值
陀螺	白噪声功率谱密度	$w_{gb}$	$0.0022 \text{ deg}/\sqrt{h}$
	零偏 GM 相关时间	$T_{gb}$	1000 s
	零偏 GM 均方根	$\sigma_{gb}$	$0.005 \text{ deg}/h$
加速度计	白噪声功率谱密度	$w_{ab}$	$0.00075 \text{ m/s}/\sqrt{h}$
	零偏 GM 相关时间	$T_{ab}$	1000 s
	零偏 GM 均方根	$\sigma_{ab}$	25 mGal
观测噪声			
GNSS	位置误差	$n_{r,E}$	平面: $1 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$
		$n_{r,h}$	高程: $2 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$
NHC	速度误差	$n_{v,nhc}$	$0.1 \text{ mm/s}/\sqrt{Hz}$
其它运动信息			
小车行进速度	1 m/s		
说明: GM 表示零偏误差建模为一阶高斯马尔可夫过程, 假设 IMU 各敏感轴选型一致; 非完整性约束 (NHC) 的速度误差参数跟小车与钢轨的密贴程度有关; 量测噪声都是按连续时间给的谱密度参数			

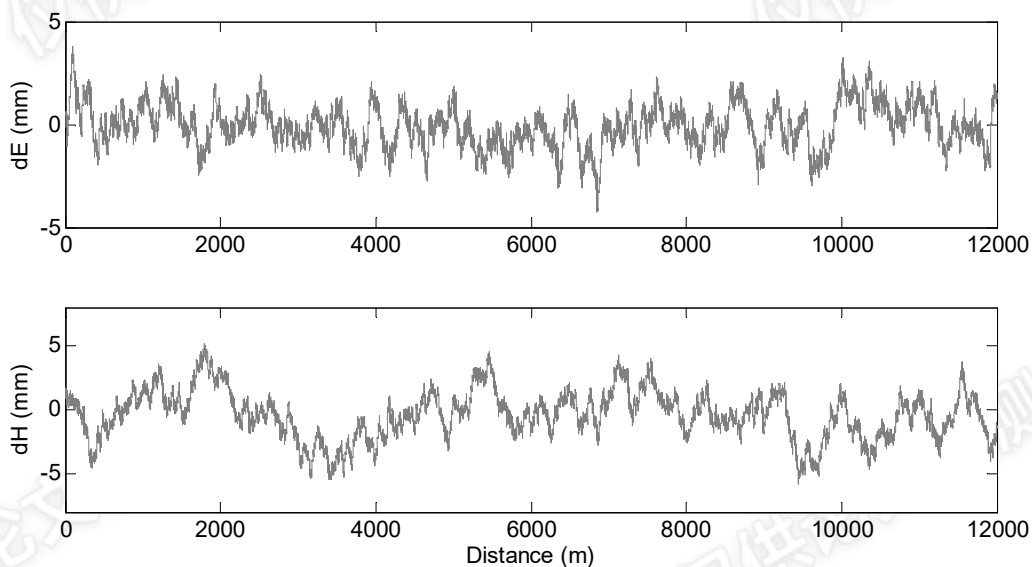


图 3-6 蒙特卡洛仿真得到的 A-INS 位置误差序列



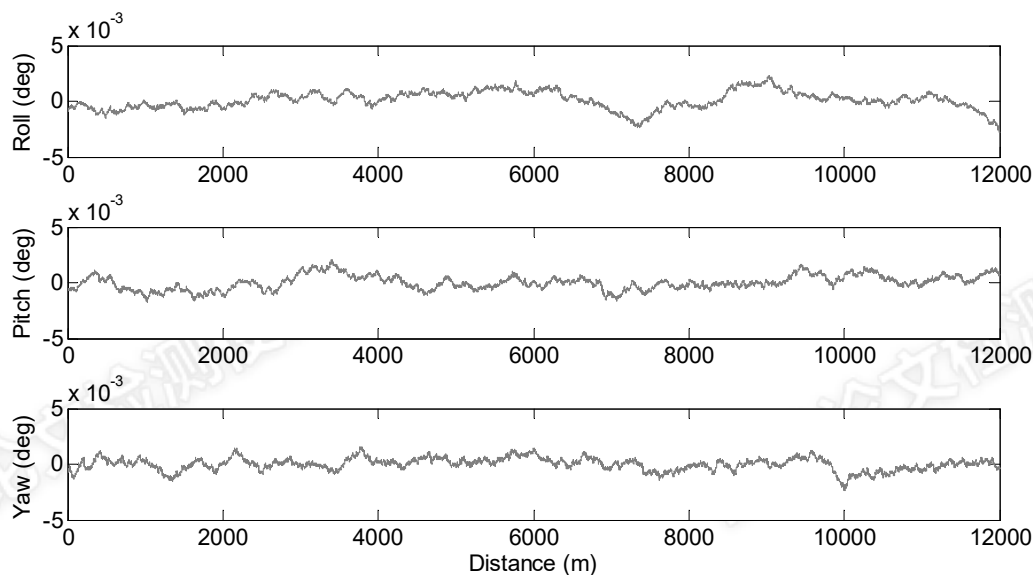


图 3-7 蒙特卡洛仿真得到的 A-INS 姿态角误差序列

图 3-6 为 A-INS 的位置误差曲线，由于假设轨检小车沿正北方向运动，北向位置误差并不影响轨道不平顺的测量，因此图中只给出了东向位置和高程的误差曲线。东向位置误差的标准差为 1.2 mm ( $1\sigma$ )，高程误差的标准差为 2.0 mm ( $1\sigma$ )，位置误差曲线总体在 1 cm 的范围内波动。图 3-7 为 A-INS 组合导航的姿态误差，如 2.2.1.2 所述，横滚角误差直接决定了轨道超高或者水平的测量误差，从图中可以看出横滚角误差绝对值不大于 0.002 deg，从横滚角的误差序列可以推出对应的轨道超高测量精度为 0.03 mm，完全能够满足超高测量的精度要求（限差为 2 mm）。

图 3-6 中的 A-INS 位置误差曲线整体在厘米级范围内波动，但可以看出各历元间存在明显的相关性。为研究位置误差的随机过程特性，应首先辨识出主要的噪声类型。随机过程可以方便地通过其功率谱密度函数（Power Spectral Density, PSD）、自相关函数、Allan 方差和均方值等统计特性来描述。其中功率谱密度函数是频域分析方法，而 Allan 方差分析方法是一种应用广泛的随机信号时域分析方法。本文主要采用 Allan 方差分析方法和 PSD 方法分别从时域和频域对 A-INS 误差的随机过程样本的基本特性进行分析。

### 3.3.2 Allan 方差分析

#### 3.3.2.1 Allan 方差分析方法

Allan 方差分析方法是 David Allan 于 1996 年提出的针对振荡器相位和时钟频率稳定性的时域分析方法，后来被广泛应用于惯性传感器的随机误差模型辨识，并于 1997 年被 IEEE 推荐为陀螺仪误差参数分析的标准方法。目前，Allan 方差已逐渐作为一种独立的时间序列分析方法被广泛应用，详细介绍可参考文献(Allan 1966, Barnes, Chi et al. 1971, IEEE 1998, Hou 2005, El-Sheimy, Hou et al. 2008, Riley 2008, Zhang, Niu et al. 2013,

Niu, Chen et al. 2014)。Allan 方差在误差分析方面有其独特的优势，能非常容易地对误差序列中各主要误差源的类型进行辨识，而且具有计算方便等优点。Allan 方差分析的步骤为：

(1) 假设被分析信号的离散采样序列为  $y_i (i=1,2,\dots,N)$ ，采样间隔（例如时间或距离间隔）为  $\tau_0$ 。按窗口  $\tau=(n-1)\tau_0, n < N/2$  将序列分成  $N_c$  个相互之间无重叠的窗口，每个窗口内包含  $n$  个数据点。

(2) 计算每个窗口内  $n$  个数据点的均值，记为  $\bar{y}_k$ ：

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} y_i, \quad k=1,2,\dots,N_c \quad (3.83)$$

(3) 对应于窗口长度  $\tau$  的 Allan 方差记为  $\sigma_{Allan}^2(\tau)$ ，计算公式为：

$$\sigma_{Allan}^2(\tau) = \frac{1}{2(N_c-1)} \sum_{k=1}^{N_c-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \quad (3.84)$$

(4) 改变窗口长度  $\tau$ ，重复 (1) ~ (3) 的计算过程，则可计算出对应于不同窗口长度  $\tau$  的一系列 Allan 方差值。采用双对数图  $\log(\sigma_{Allan}) \sim \log(\tau)$  的方式画出 Allan 标准差与窗口长度  $\tau$  的关系曲线，即 Allan 标准差曲线。

当步骤(1)中的相邻窗口之间有重叠时，对应的 Allan 方差又被称为有重叠的 Allan 方差 (Overlapping Allan Variance) (Riley 2008)，比标准 Allan 方差在实际中更常用。不同随机误差的 Allan 标准差曲线具有不同曲线特性，如曲线形状、斜率等，如图 3-8 所示。根据 Allan 方差曲线能够较好的识别出主要的误差/噪声类型。

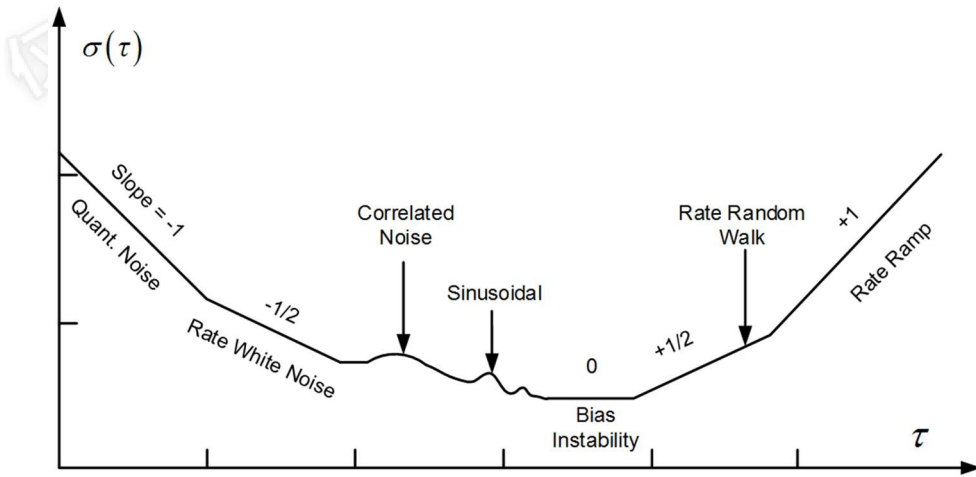


图 3-8 各类随机误差的 Allan 标准差曲线(IEEE 1998)

从式(3.84)可以看出，对于给定的序列，当窗口长度  $\tau$  越大，则计算 Allan 方差时有效均值  $\bar{y}_k$  的数量越少，此时 Allan 方差的计算误差也越大。对应于 Allan 标准差曲线，横轴数值越大对应的 Allan 方差曲线的误差也越大。IEEE(IEEE 1998)给出了 Allan 方差估计误差百分比的计算表达式：

$$\delta(\sigma_{Allan}) = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{N}{n}-1\right)}} \quad (3.85)$$

式中， $N$  为序列的数据总数， $n$  为对应于长度为  $\tau$  的窗口内的样本点数量。

### 3.3.2.2 A-INS 位置误差的 Allan 方差分析

计算 3.3.1 小节得到的位置误差序列的 Allan 方差，并画出 Allan 标准差曲线，如图 3-9 所示。可以看出高程误差的 Allan 方差整体略大于东向位置误差的 Allan 方差，但二者的曲线形状非常相似。当里程窗口长度（distance cluster） $\tau < 100$  m 时，曲线非常接近一条斜率为 +1/2 的直线，Allan 方差随窗口长度的增大而变大，在这个里程尺度内可建模为随机游走。当里程窗口长度  $\tau$  大于 100 m 时，东向位置误差的 Allan 曲线开始下降。根据 Allan 方差曲线特性（图 3-8）可知，高程误差可以建模为随机游走，而东向位置误差则更接近一阶高斯马尔可夫过程。因此，A-INS 的高程和东向位置误差序列各历元之间均存在相关性，如果对误差序列进行某些类型的低通滤波（如 0.2 m 的滑动窗口平滑）处理并不能显著减小误差的幅度。

Allan 方差虽然可以直观地表征 A-INS 位置误差在不同里程尺度或时间尺度上的相对精度，有效反映组合导航误差是呈现高频噪声特性还是随时间缓变(张全 2015)，但值得注意的是，Allan 方差计算时对窗口内的数据块进行求平均运算，并对相邻数据块均值求差，所以 Allan 方差反映的是不同窗口之间的变化趋势。轨道不平顺测量所关注的是两个独立的检核点之间的相对误差，其物理意义与 Allan 方差并不相同。

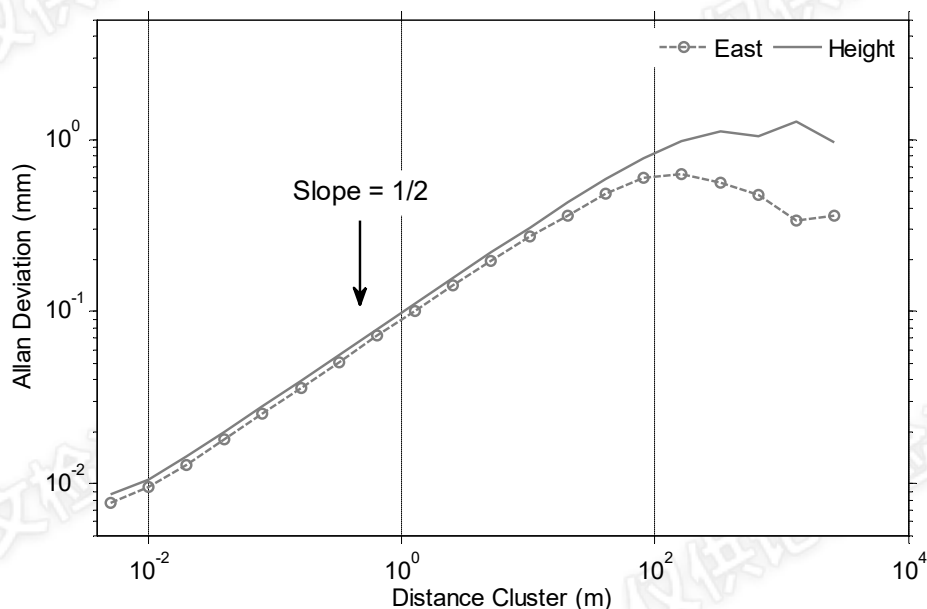


图 3-9 A-INS 位置误差 Allan 标准差曲线

### 3.3.3 功率谱密度分析

功率谱密度函数是一种经典的随机信号分析方法，随机信号的 Allan 方差与功率谱密度之间也存在特定的转换关系：由信号的功率谱密度函数可以推导出唯一对应的 Allan 方差，但是反之不成立(El-Sheimy, Hou et al. 2008, Riley 2008)。本文采用 Welch 功率谱密度计算方法来计算误差序列的功率谱密度。Welch 功率谱密度是一种采用改进平均周期图的功率谱密度算法，直接将信号的采样序列进行傅里叶变换求取功率谱密度(Welch 1967)。采用双对数图  $\log(PSD) \sim \log(Fs)$  的方式画出功率谱密度与频率之间的曲线图，则根据曲线的形状可以有效地辨识主要的噪声类型(Agnew 1992, IEEE 1998, Hou 2005)。由于 PSD 的双对数图的高频区域的数据点很集中，本文对功率谱密度数据采用了求平均处理技术来突出功率谱密度曲线的主要形状和变化趋势，提高曲线的可读性(IEEE 1998, Hou 2005)。

图 3-10 为 A-INS 位置误差序列对应的功率谱密度曲线，由于序列的采样频率为 200 Hz，PSD 曲线的奈奎斯特频率为 100 Hz。从图中可以看出东向位置误差和高程误差的 PSD 曲线形状比较相似，高程的幅度略大于东向，当频率大于 0.01 Hz 时，PSD 曲线均非常接近斜率为-2 的直线。高程误差序列的主要误差可以建模为随机游走，而东向位置误差的形状在低频部分功率谱密度接近常值，在 0.01 Hz 以上的频段开始以-2 斜率下降，符合一阶高斯马尔可夫过程的功率谱密度曲线特征。因此，PSD 分析与 Allan 方差对于 A-INS 组合导航主要噪声类型的辨识结果一致。

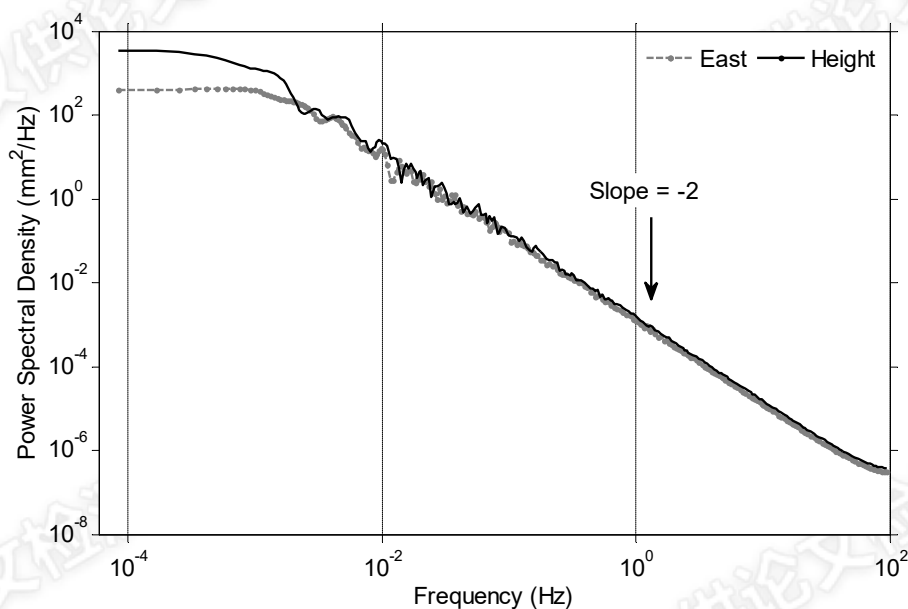


图 3-10 A-INS 位置误差功率谱密度曲线

### 3.4 A-INS 轨道测量误差定量分析

本章 3.3 节根据 A-INS 误差传播模型，通过蒙特卡洛仿真的方法得到了在系统输入

噪声激励下的 A-INS 测量误差序列。应用 Allan 方差和功率谱密度的方法从时域和频域分析了测量误差的随机过程特性并辨识了其中的主要噪声类型，分析表明 A-INS 位置误差历元之间存在强相关性。

本节将基于 A-INS 的位置误差序列对轨道几何状态参数的测量误差做出定量分析。首先，定量分析导航级惯导在 GNSS 位置和非完整性约束辅助下的轨道测量误差，从理论上回答“高精度惯导在厘米级的 GNSS 位置辅助下能否实现 1 mm 的相对测量精度”这一问题；讨论非完整性约束对于 A-INS 测量精度的重要影响。然后，定量分析各主要的惯性传感器误差对轨道几何状态参数测量精度的影响，以此回答“什么精度等级的惯导才能满足高铁轨道不平顺测量的精度要求”这一问题。最后，讨论轨检小车的行进速度是否及如何影响最终的测量精度。

### 3.4.1 轨道不平顺测量误差分析

根据 3.2 节建立的 A-INS 误差传播模型和表 3-2 给出的导航级惯导误差参数用蒙特卡洛仿真的方法得到足够长的位置误差样本，然后根据式(3.11)可由位置误差推算出轨道不平顺的测量误差。根据位置误差序列计算轨道不平顺误差的具体过程为：1) 对 A-INS 误差序列进行空间降采样：惯导以 200 Hz 的高采样率输出导航结果，当轨检小车以 1 m/s 的速度运动时，测量结果的里程间隔为 5 mm；而高铁轨道不平顺测量一般要求在轨枕对应的里程点上测量即可，其里程间隔为 0.625 m。具体可采用低通滤波器进行空间降采样，如滑动窗口平均法（详见第五章）。但值得注意的是低通滤波并不能显著提高测量精度，因为在这一里程尺度内的噪声为相关噪声，如 3.3.2.2 节所述。2) 根据(3.11)式由 A-INS 的位置误差推算出不同波长的轨向和高低不平顺测量误差，得到轨道不平顺测量误差序列。从式(3.11)可以看出，直线轨道的不平顺测量误差等于位置误差之差。例如，对于零坡度直坡，高低不平顺参数等于两个检核点之间的高程测量值之差，从而高低不平顺的测量误差等于两个检核点之间的高程测量误差之差。

本小节只分析导航级惯导在 GNSS 位置和非完整性约束辅助下的长短波轨向、高低不平顺的测量误差。超高/水平测量误差在 3.3.1 节中已做了定量分析；而轨距的测量精度完全取决于轨距传感器，与 A-INS 组合导航系统无关。

#### 3.4.1.1 短波不平顺

图 3-11 为导航级惯导在厘米级 GNSS 位置及非完整性约束辅助下的短波轨向和高低不平顺测量误差曲线。可以看出，短波不平顺的误差序列整体比较平稳，幅度不大于 2 mm。由 3.3 节分析可知短波不平顺测量误差序列是平稳和各态遍历的。统计结果表明：短波轨向和高低不平顺测量误差均服从正态分布，如图 3-12 所示。这也与 3.3 节所述的结论一致：线性时不变系统的输入为高斯过程时，输出及其线性组合也服从高斯

分布。

从图 3-12 可以看出短波轨向不平顺测量误差的期望为 0, 标准差为 0.33 mm ( $1\sigma$ ), 高低不平顺测量误差期望为 0, 标准差为 0.43 mm ( $1\sigma$ )。根据正态分布的性质可知: 可以按 99.73% 的置信度断定短波轨向不平顺的测量误差幅度不大于 1.0 mm (即 3 倍标准差), 短波高低不平顺的测量误差幅度不大于 1.29 mm。因此短波不平顺的测量误差约为限差的 1/2, 与常规轨检小车的标称精度相当 (如 1.2.2.1 节所述), 能够满足高铁轨道不平顺的测量精度要求。

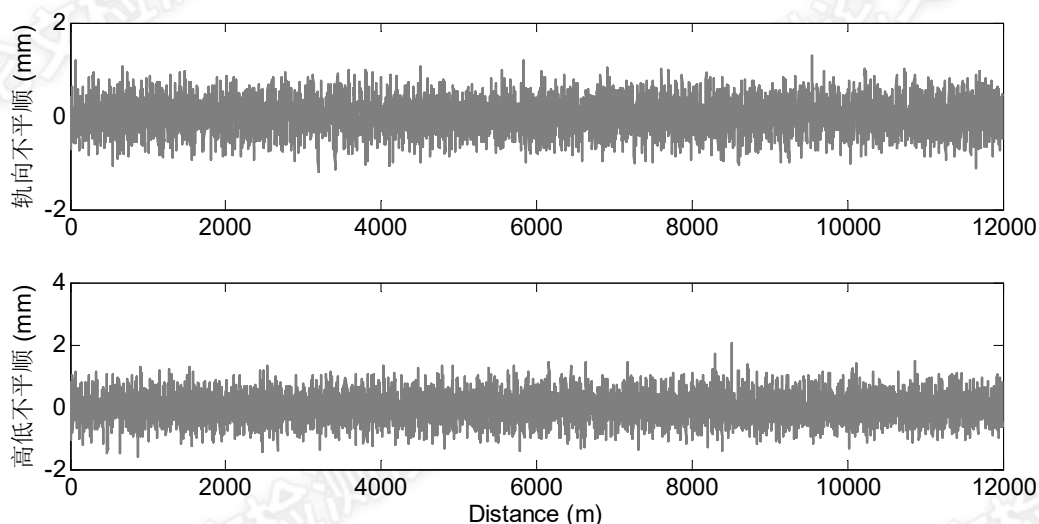


图 3-11 短波轨道不平顺测量误差

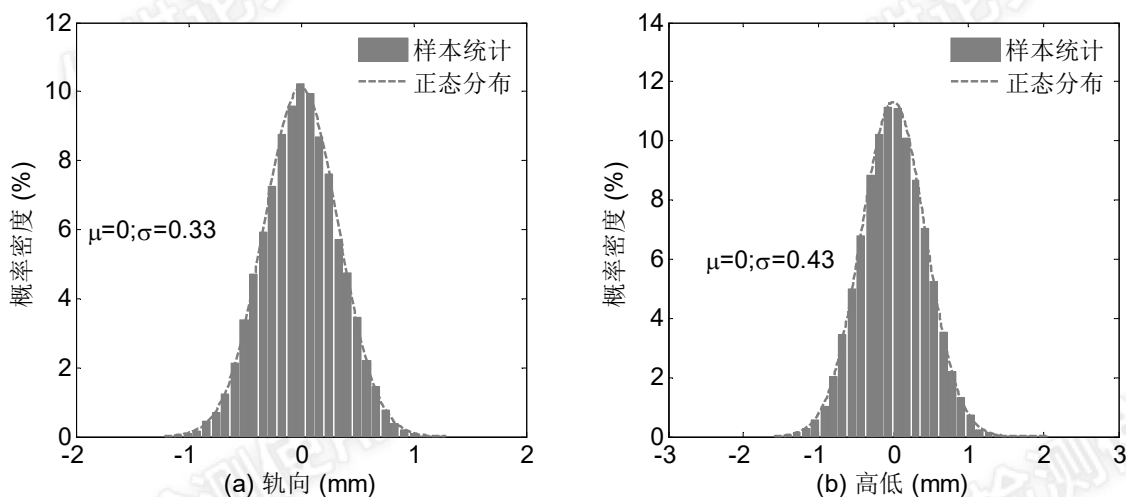


图 3-12 轨道短波不平顺测量误差统计, 图中虚线为根据样本均值和方差计算的理想正态分布曲线; (a) 短波轨向不平顺测量误差概率分布; (b) 短波高低不平顺测量误差概率分布

### 3.4.1.2 长波不平顺

图 3-13 为长波轨向和高低不平顺测量误差曲线, 可以看出误差序列历元之间存在一定的相关性。这是因为计算长波不平顺之前对位置误差序列进行了低通滤波处理, 同时

里程上的降采样引入了量化噪声，这可以通过分析其 Allan 方差曲线来验证。长波不平顺测量误差统计如图 3-14 所示，可见长波轨向和高低不平顺的测量误差也服从高斯分布。可按 99.73% 的置信度断定长波轨向不平顺的测量误差不大于 2.3 mm（3 倍标准差），长波高低不平顺的测量误差不大于 3.0 mm（3 倍标准差），均小于限差（10 mm）的 1/3。可见 A-INS 轨检小车能够满足高铁长波不平顺的测量精度要求。

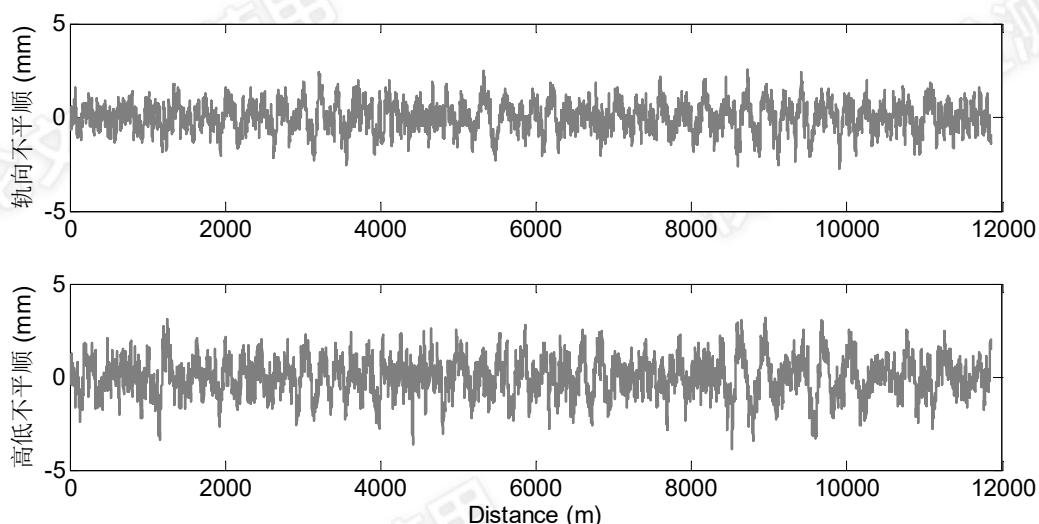


图 3-13 长波轨道不平顺测量误差

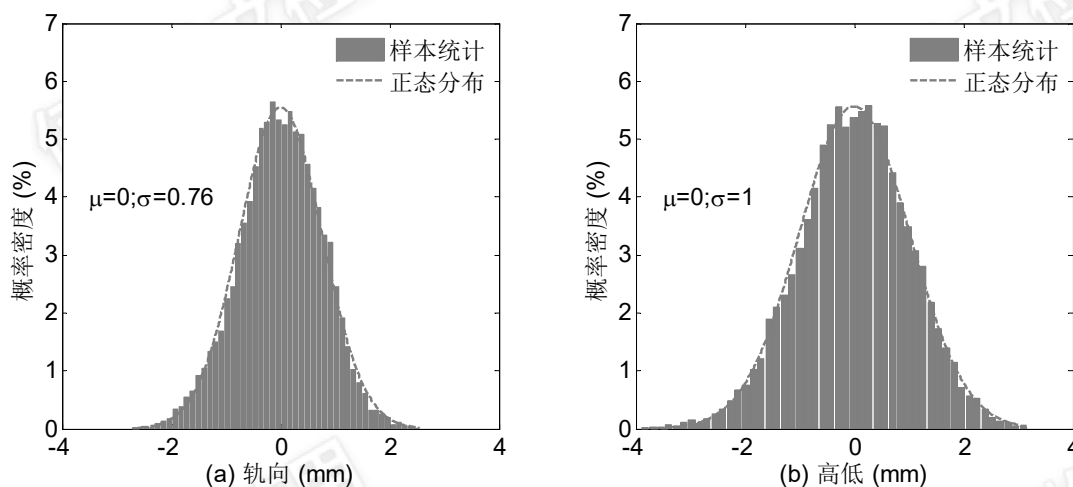


图 3-14 轨道长波不平顺测量误差统计，图中虚线为根据样本均值和方差计算的理想正态分布曲线；(a) 长波轨向不平顺测量误差概率分布；(b) 长波高低不平顺测量误差概率分布

### 3.4.2 非完整性约束对测量精度的影响

非完整性约束（NHC）辅助对 A-INS 测量精度的影响将通过对比使用和不使用非完整性约束时的轨道不平顺测量误差来评估。不妨以高程通道为例进行分析，因为高程通道在 GNSS 位置辅助的情况下，即使不启用非完整性约束卡尔曼滤波也能达到稳态，仍可沿用 3.2.4 的误差建模思路。3.2.4.2 小节建立了 A-INS 组合导航高程通道的误差传

播模型，在此基础上可以很方便地推导出无非完整性约束辅助时的高程误差传播模型。

当不使用非完整性约束辅助时，无需将俯仰角误差及东向陀螺零偏增广至卡尔曼滤波状态向量中。垂向加速度计误差仍然建模为白噪声和零偏误差的叠加，其中零偏误差仍建模为一阶高斯马尔可夫过程，并增广至系统状态向量中。

系统状态量和状态方程为：

$$\mathbf{x}_D = [\delta h_{INS} \quad \delta v_{INS,D} \quad b_{a,D}] \quad (3.86)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_D(t) = \mathbf{F}_D(t) \mathbf{x}_D(t) + \mathbf{G}_D(t) \mathbf{w}_D(t) \quad (3.87)$$

式中的符号定义与 3.2.4 节一致。其中，

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/T_{ab} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

观测方程为惯导推算的高程与 GNSS 高程测量值之差：

$$\mathbf{z}_D(t) = \mathbf{H}_D(t) \mathbf{x}_D(t) + \mathbf{n}_D(t) \quad (3.89)$$

$$\mathbf{z}_D = z_{r,D} \quad \mathbf{H}_D = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{n}_D = n_{r,h} \quad (3.90)$$

针对这一问题的连续时间卡尔曼滤波方程为：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_D(t) = \mathbf{F}_D(t) \hat{\mathbf{x}}_D(t) + \mathbf{K}_D(t) [\mathbf{z}_D(t) - \mathbf{H}_D(t) \hat{\mathbf{x}}_D(t)] \quad (3.91)$$

式中，

$$\hat{\mathbf{x}}_D = [\hat{\delta h}_{INS} \quad \hat{\delta v}_{INS,D} \quad \hat{b}_{a,D}]^T \quad (3.92)$$

增益矩阵  $\mathbf{K}$  为  $3 \times 1$  的矩阵，可由(2.88)计算得到。对式(3.87)进行拉普拉斯变换可得纯惯导误差在  $s$  域的解：

$$\mathbf{x}_D(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F}_D)^{-1} \mathbf{G}_D \mathbf{w}_D(s) \quad (3.93)$$

同理，对式(3.91)进行拉普拉斯变换，可得状态量的最优估计：

$$\hat{\mathbf{x}}_D(s) = [(s\mathbf{I} - \mathbf{F}_D + \mathbf{K}_D \mathbf{H}_D)^{-1} \mathbf{K}_D] \mathbf{z}_D(s) \quad (3.94)$$

式(3.93)减去式(3.94)，整理可得高程最优估值的误差  $d\hat{h}$  为：

$$d\hat{h} = \frac{(s + \gamma_{ab}) w_{a,D} + w_{ab,D} + [K_{11}s^2 + (K_{11}\gamma_{ab} - K_{21})s - K_{31} - K_{21}\gamma_{ab}] n_{r,h}}{s^3 + (K_{11} + \gamma_{ab})s^2 + (K_{11}\gamma_{ab} - K_{21})s - K_{31} - K_{21}\gamma_{ab}} \quad (3.95)$$

式中符号的定义与文章 3.2.4 节一致。式(3.95)即 A-INS 组合导航在没有非完整性约束辅助下（只有 GNSS 位置辅助）的高程误差传播模型。采用 3.4.1 小节的方法，基于该传播模型我们可以分析高程及高低不平顺测量误差，如图 3-15 所示。

从图中可以看出在没有非完整性约束的情况下，仅依靠 GNSS 位置更新，A-INS 的高程误差明显增大至厘米级。短波高低不平顺和长波高低不平顺的测量误差均大于限差值，如图 3-16 所示，无法满足高铁轨道不平顺测量的精度要求。对比图 3-16、图 3-12 和图 3-14 表明：针对铁路轨道几何状态精密测量应用，非完整性约束辅助对于提高相



对测量精度作用明显。如果不使用非完整性约束，仅依靠 GNSS 位置更新难以实现 1 mm 的轨道不平顺测量精度。但若仅使用非完整性约束更新，而没有 GNSS 位置辅助的话，A-INS 组合导航的位置精度是发散的，也不行。

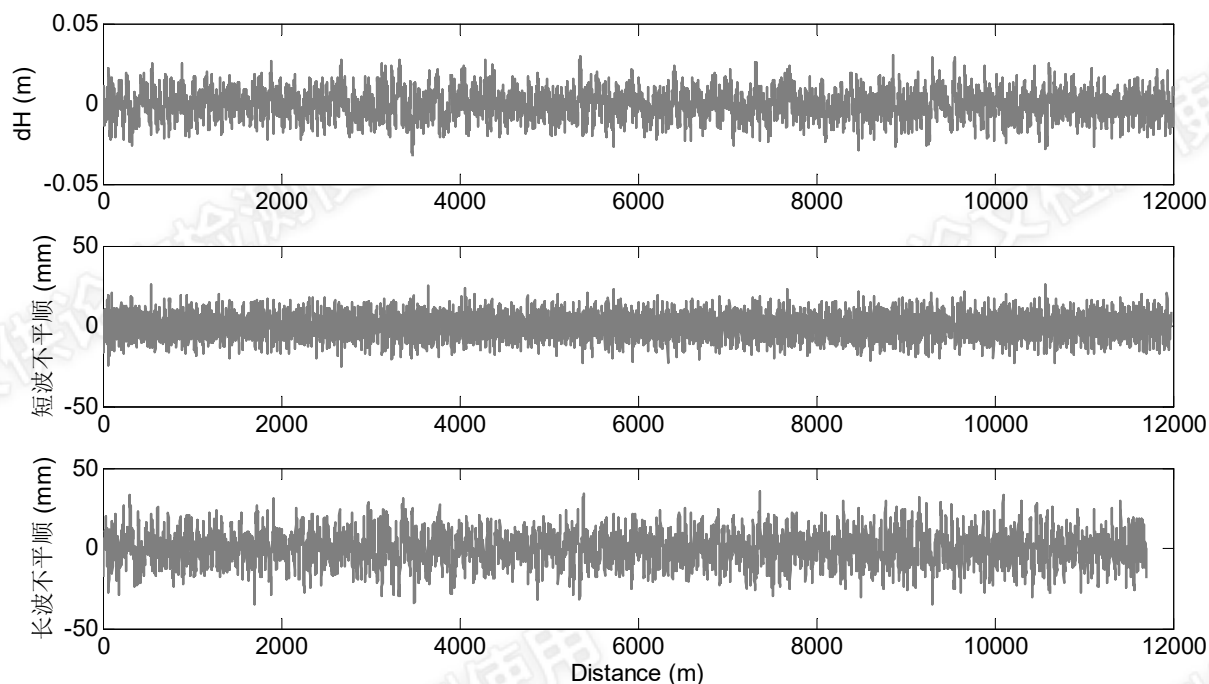


图 3-15 无 NHC 辅助下的高程及高低不平顺测量误差

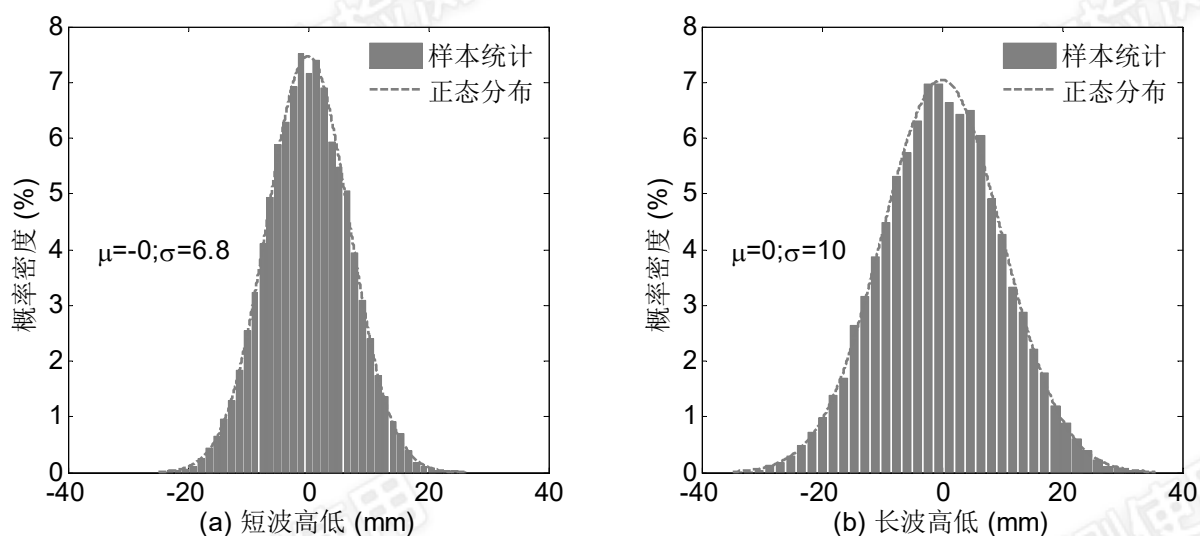


图 3-16 无 NHC 更新时轨道高低不平顺测量误差统计，图中虚线为根据样本均值和方差计算的理想正态分布曲线；(a) 短波高低不平顺测量误差概率分布；(b) 长波高低不平顺测量误差概率分布

### 3.4.3 惯性传感器误差对测量精度的影响

惯性传感器误差是 A-INS 组合导航的重要误差源，能显著地影响测量精度。前面分析表明高精度惯导在 GNSS 位置和非完整性约束辅助下能满足高铁轨道不平顺测量的精度要求。那么，中低精度惯导是否也能实现类似的测量精度，或者说什么等级的惯导

才能满足高铁轨道不平顺测量的精度要求？这是一个关乎实际系统设计的问题，不同精度等级的惯导价格差异很大，在满足精度要求的基础上合理控制成本对于 A-INS 轨检小车设备研发和提高工程应用的性价比具有重要意义。回答这一问题的关键在于定量分析惯性传感器误差对 A-INS 测量精度的影响。

本节采用“控制单一变量”的策略来定量分析在有 GNSS 位置和非完整性约束辅助下，各项惯性传感器误差对 A-INS 轨道测量精度的影响。根据表 3-2 来设置量测噪声和运动速度等参数，且不对其数值进行调整；只研究惯性传感器误差数值改变所带来的测量精度的变化。下面将定量分析陀螺零偏误差、加速度计零偏误差、陀螺白噪声（即角度随机游走，Angular Random Walk, ARW）和加速度计白噪声（又称速度随机游走，Velocity Random Walk, VRW）四类惯性传感器误差的影响。

对每类惯性传感器误差，每改变一次数值均按 3.4.1 节的方法计算对应的位置误差（ $1\sigma$ ）、轨道超高测量误差（ $3\sigma$ ）及轨道不平顺测量误差（ $3\sigma$  倍标准差）。如此，得到 A-INS 轨道测量误差随惯导器件误差参数变化的曲线。

#### 3.4.3.1 陀螺零偏误差

陀螺零偏误差建模为一阶高斯马尔可夫过程，由相关时间和均方根两个参数来描述。前期研究表明调整一阶高斯马尔可夫过程的相关时间并不会显著影响或改善 A-INS 的测量精度。因此本文只改变零偏误差一阶高斯马尔可夫过程的均方根，而不对相关时间进行调整。图 3-17 和图 3-18 为 A-INS 轨道测量误差随陀螺零偏误差的变化曲线。从图 3-17 可以看出，陀螺零偏误差对长短波轨道不平顺测量的影响均比较明显：轨道不平顺测量误差随零偏误差的增大而显著变大，接近抛物线关系。图中陀螺零偏误差（陀螺零偏不稳定性）从 0.01 deg/h 到 1 deg/h，覆盖了典型导航级到中等战术级惯导。从图 3-18 可以看出，绝对位置误差也随着陀螺零偏误差的增大而变大，但相对幅度不如平顺性那么大且逐渐趋于稳定，这应该是由于绝对位置精度最终取决于 GNSS 的位置修正。陀螺零偏误差对横滚角和超高的测量（图 3-18 b，图中已转换成超高测量值）几乎没有影响。

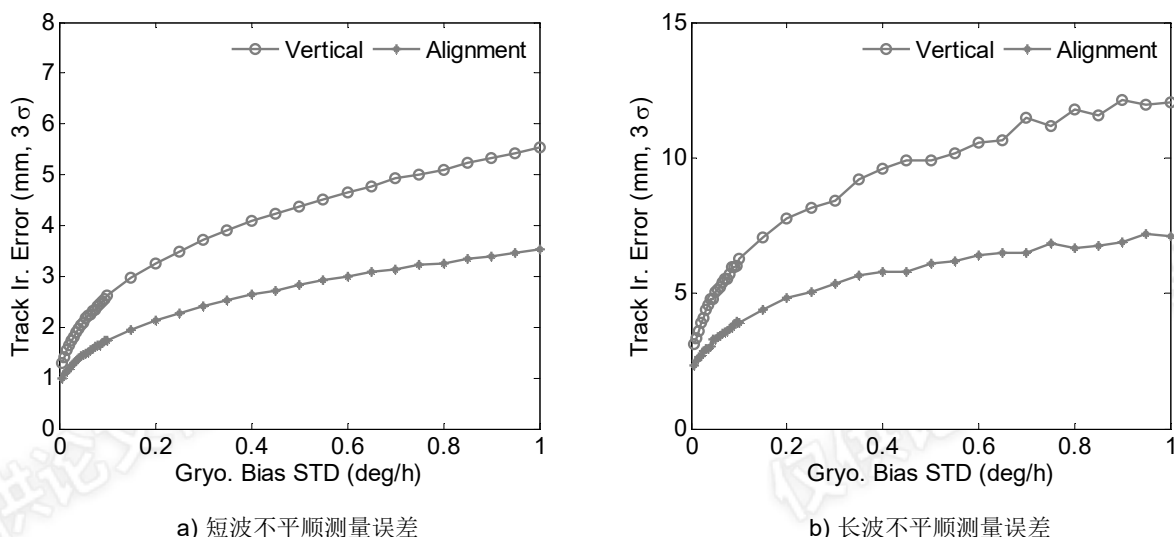


图 3-17 轨道不平顺测量误差随陀螺零偏误差的变化关系。(Track Ir.为轨道不平顺的简写, 下同)

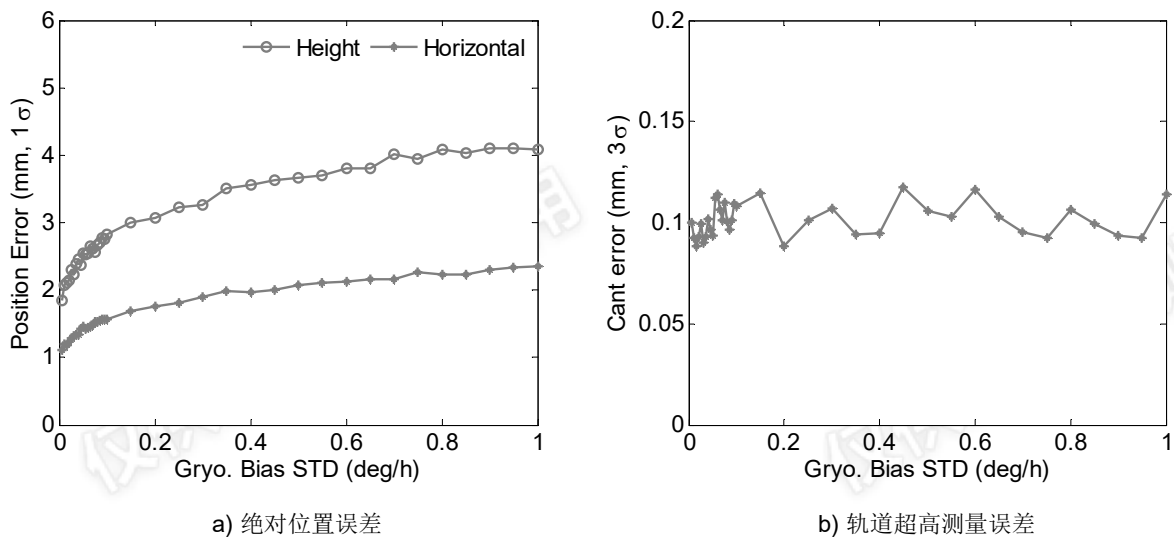


图 3-18 绝对位置误差和轨道超高测量误差随陀螺零偏误差的变化关系

### 3.4.3.2 加速度计零偏误差

A-INS 轨道测量误差随加速度计零偏误差的变化曲线如图 3-19 和图 3-20 所示。可以看出绝对位置误差和轨道不平顺测量误差几乎不受加速度计零偏的影响。即使加速度计降低到典型战术级惯导的水平, 绝对位置和轨道不平顺测量精度也无明显变化。但加速度计零偏误差会直接影响横滚角的测量精度, 从而对轨道超高的测量精度影响明显。

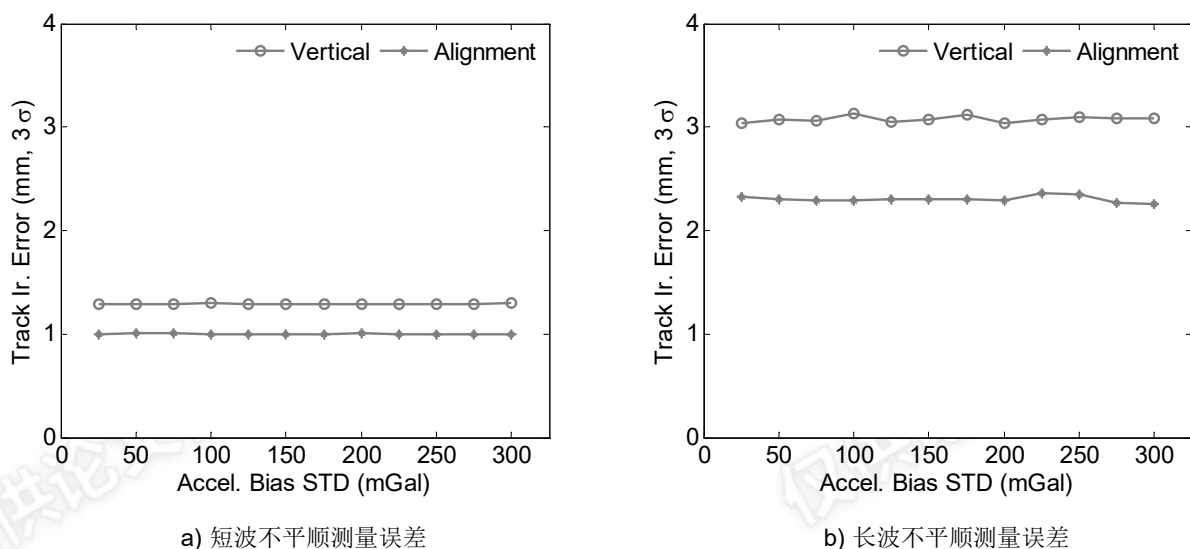


图 3-19 轨道不平顺测量误差随加速度计零偏误差的变化关系

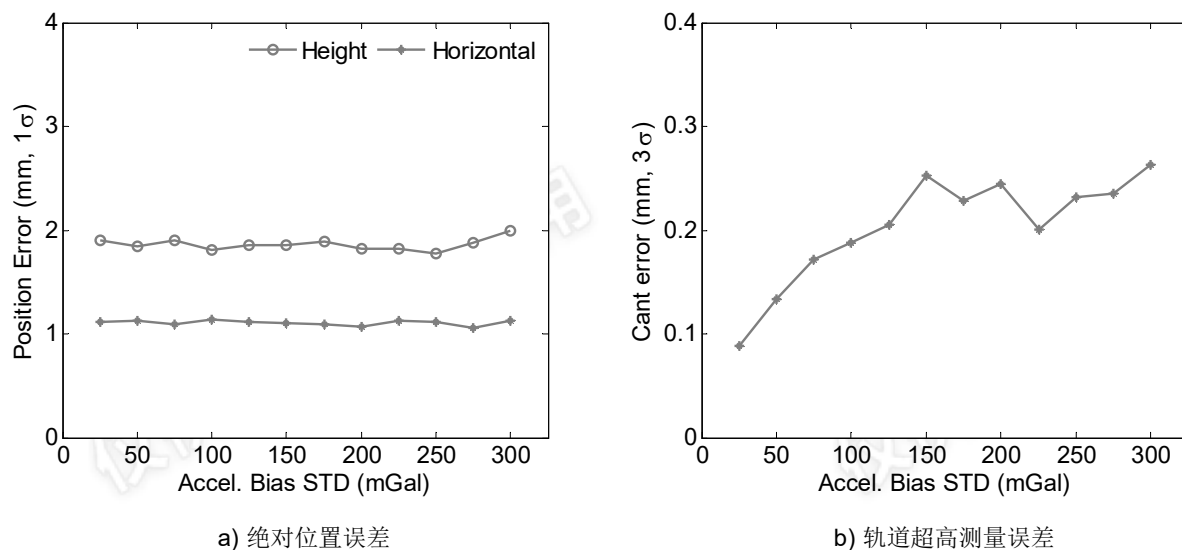
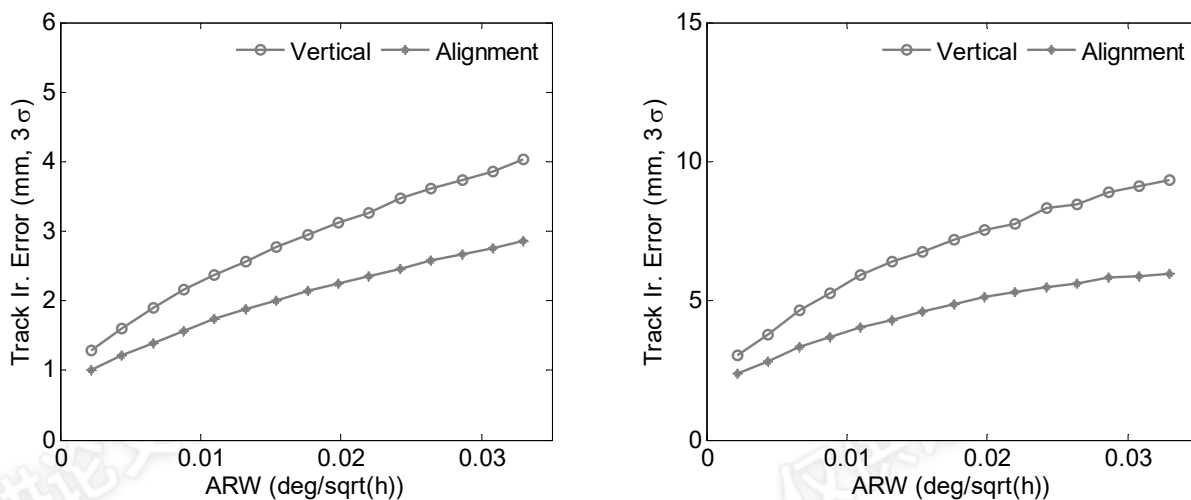


图 3-20 绝对位置误差和轨道超高测量误差随加速度计零偏误差的变化关系

### 3.4.3.3 陀螺白噪声 (ARW)

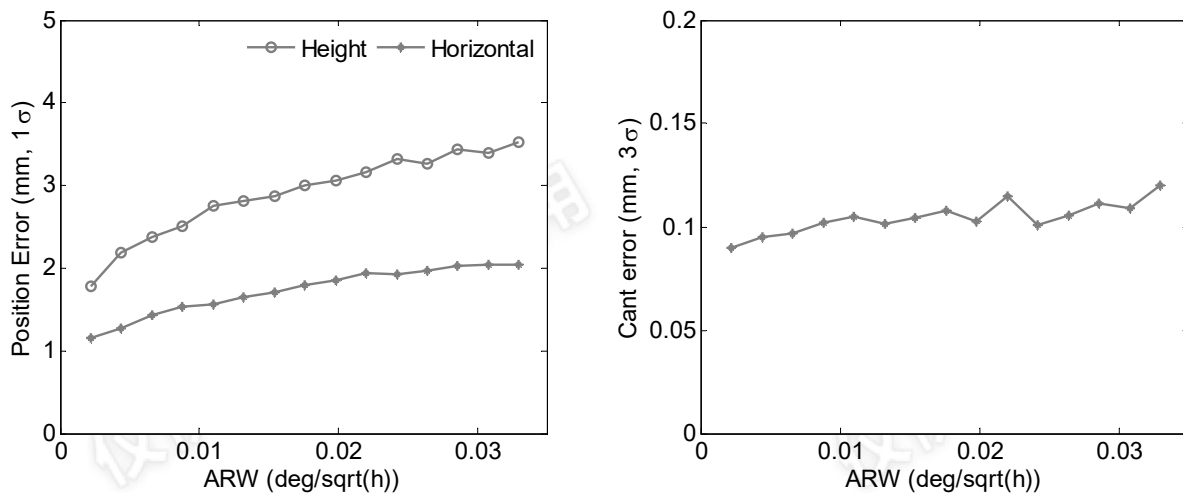
A-INS 轨道测量误差随陀螺白噪声的变化曲线如图 3-21 和图 3-22 所示，图中陀螺白噪声强度覆盖了典型导航级到中等战术级惯导。从图中可以看出陀螺白噪声对于 A-INS 组合导航绝对位置误差和轨道不平顺测量精度均有显著影响，但对超高测量的影响几乎可以忽略。对比图 3-21 和图 3-17 可以看出，陀螺白噪声对轨道不平顺的影响还是略小于陀螺零偏误差的影响。



a) 短波不平顺测量误差

b) 长波不平顺测量误差

图 3-21 轨道不平顺测量误差随 ARW 的变化关系



a) 绝对位置误差

b) 轨道超高测量误差

图 3-22 绝对位置误差和轨道超高测量误差随 ARW 的变化关系

### 3.4.3.4 加速度计白噪声 (VRW)

图 3-23 和图 3-24 为加速度计白噪声对 A-INS 绝对位置误差和轨道不平顺测量精度的影响曲线。可以看出,绝对位置误差和轨道不平顺几乎不受加速度计白噪声的影响。轨道超高的测量误差与加速度计白噪声方差强度成正线性增长的关系,但总体影响非常微弱。

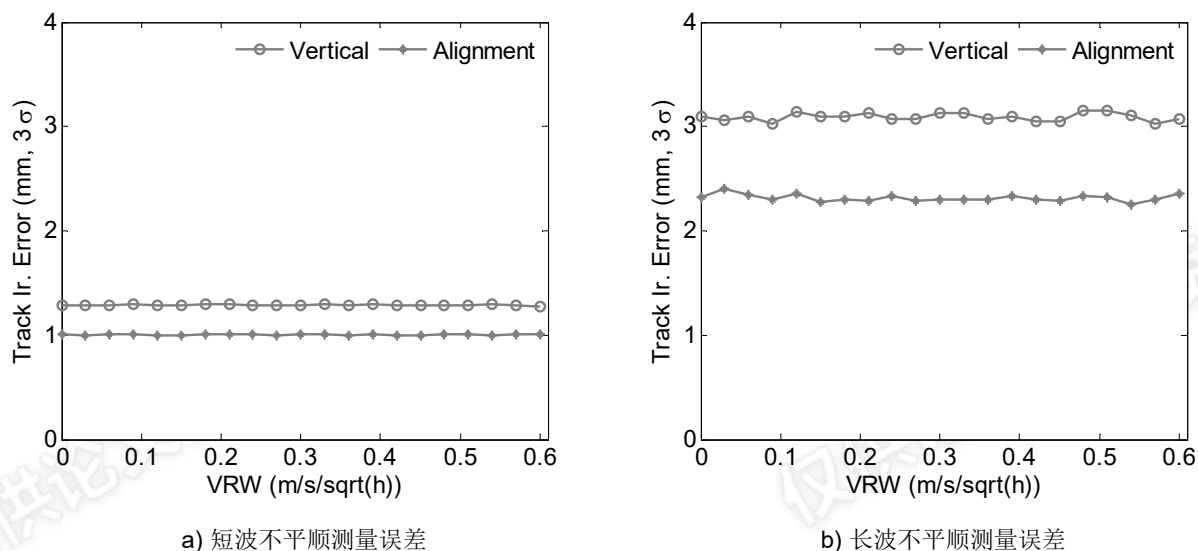


图 3-23 轨道不平顺测量误差随 VRW 的变化关系

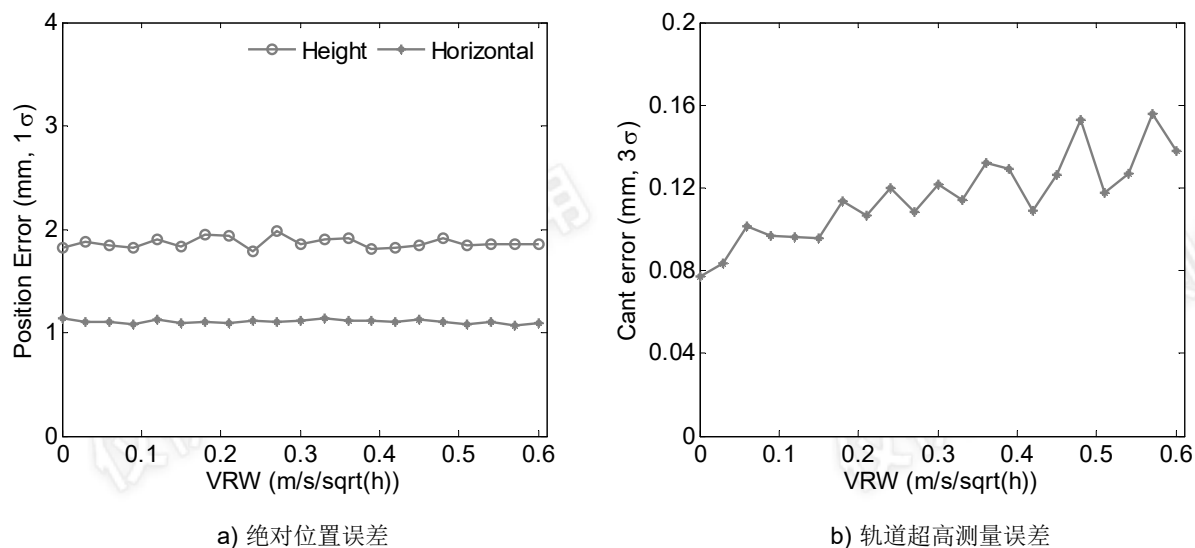


图 3-24 绝对位置误差和轨道超高测量误差随 VRW 的变化关系

### 3.4.4 小车运动速度对测量精度的影响

轨检小车的运动速度是否影响轨道不平顺的测量精度？A-INS 轨检小车是否跟动检车一样有最低速度限制，当低于某一速度阈值时测量精度是否会明显下降？这些都是实际工程应用很关心的问题。本节针对这一问题进行研究，利用前述 A-INS 轨道测量误差的理论模型和分析方法，定量分析轨检小车运动速度对最终轨道测量精度的影响。参数配置如下：惯导的辅助信息包括 GNSS 位置和非完整性约束，惯导器件误差及辅助信息的观测噪声按表 3-2 设置，轨道测量误差的具体计算方法与 3.4.1 节一致。

轨检小车的运动速度对轨道不平顺测量精度的影响如图 3-25 所示。很明显，短波和长波不平顺测量误差随着运动速度的提高而减小，但其减小的趋势随着运动速度的增加而逐渐趋于平缓，原因分析如下：当小车运动速度提高后，轨道不平顺性测量关心的里程尺度（5 米和 150 米点对）对应测量时间会成反比地缩短，而由前面 3.3.2 节 Allan

方差分析可知, A-INS 定位误差的时间尺度越短, 相对定位误差越小, 因此轨道不平顺测量误差总体上随运动速度提高而减小。但是, 随着小车运动速度的提高, 惯导的动态误差(包括 IMU 比例因子和交轴耦合误差、姿态误差等)在 A-INS 输出结果中的表现会逐渐增大, 逐渐抵消时间尺度减小而带来的好处, 因此不平顺性测量误差曲线逐渐趋于平缓。相反的, 从图 3-25 曲线的左边(运动速度小于 1m/s 的部分)可以看出, 不平顺测量误差随运动速度的降低而显著增大。在这种低速作业条件下, A-INS 的动态误差是次要误差因素, 而由于运动速度降低导致不平顺性测量所对应的时间尺度加长所造成的测量误差增大起决定性作用。

这里需要特别强调的是, 这里所说的小车运动速度, 是指整个轨道测量过程中的平均速度, 而不是指的瞬时速度。如果操作过程中偶尔出现短暂的减速甚至停止, 高精度惯导能够很好地保持住相对测量精度, 而不会对不平顺性测量精度造成显著影响。

图 3-26 考察了 A-INS 绝对位置误差和超高不平顺受小车运动速度的影响。从图 3-26a 可以看出, 绝对位置误差随着运动速度的提高而略有增大, 这与轨道不平顺测量误差的变化趋势正好相反。原因分析如下: 当小车运动速度加快时, 惯导的动态误差(包括 IMU 的比例因子和交轴耦合误差, 以及惯导姿态误差等)会表现得更突出, 惯导推算的定位误差会增大, 因此造成 A-INS 组合导航的绝对位置误差随着运动速度的提高而增大; 但当位置误差逐渐增大到接近 GNSS RTK 定位误差水平时, RTK 的修正作用就会发挥出误差抑制作用, 使得 A-INS 绝对位置误差趋于一个稳定的水平。

对比图 3-25 中不平顺误差变化趋势与图 3-26a 中绝对位置误差变化趋势, 两者正好相反, 这一现象突出地表明, 不平顺测量所依赖的空间相对精度与组合导航系统的绝对定位精度在本质上是不同的, 两者不可混淆。

从图 3-26b 可以看出, 小车运动速度的变化对超高的测量几乎没有影响, 这一点容易理解, 因为超高测量所依赖的 A-INS 横滚角估计精度与小车运动速度无关。

在实际使用过程中, 小车运动速度会对非完整性约束(NHC)的虚拟速度观测精度造成一定的影响。当运动速度提高时, 小车的轮子与轨道面接触的激扰作用力会造成车体振动, 而破坏非完整性约束成立的条件; 当速度越低时, 非完整性约束的成立条件越好, 虚拟速度观测值的观测噪声也可以设置得更小。这一影响因素在本节的理论分析中由于缺少确切信息而未考虑。

最后值得强调的是, 除了对轨道测量精度的影响, 提高小车运动速度后可以直接提高 A-INS 轨检小车的作业效率, 这个和精度改善同样重要。在现场条件允许的情况下, 采用尽量快的推行速度是有利的, 其速度上限应该取决于确保小车轮子与轨道面保持密贴, 以及现场操作安全, 一般不超过 5m/s (即 18km/h)。

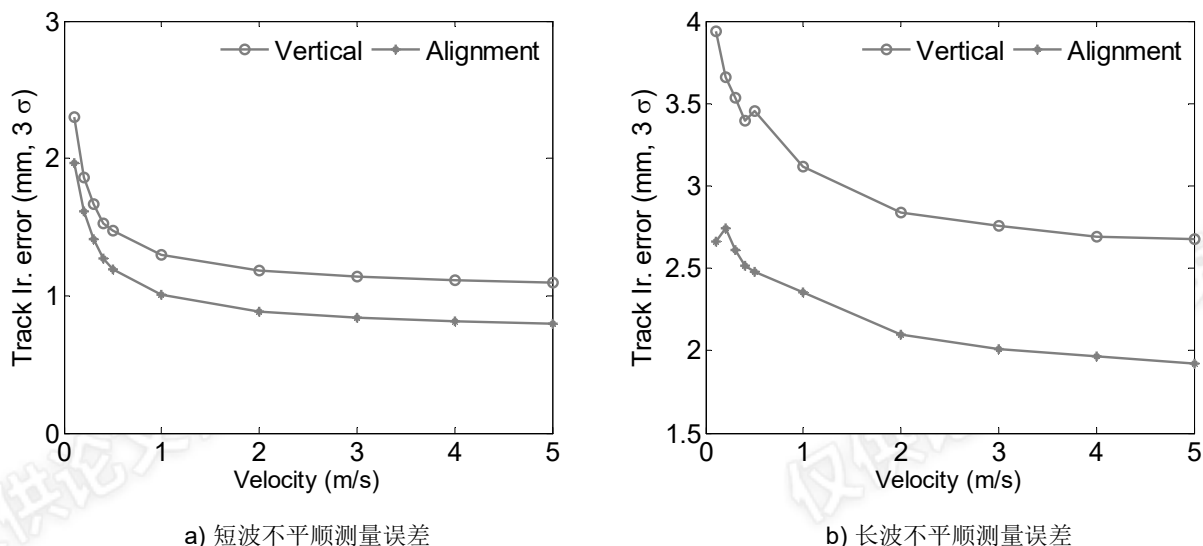


图 3-25 轨道不平顺测量误差与运动速度的关系

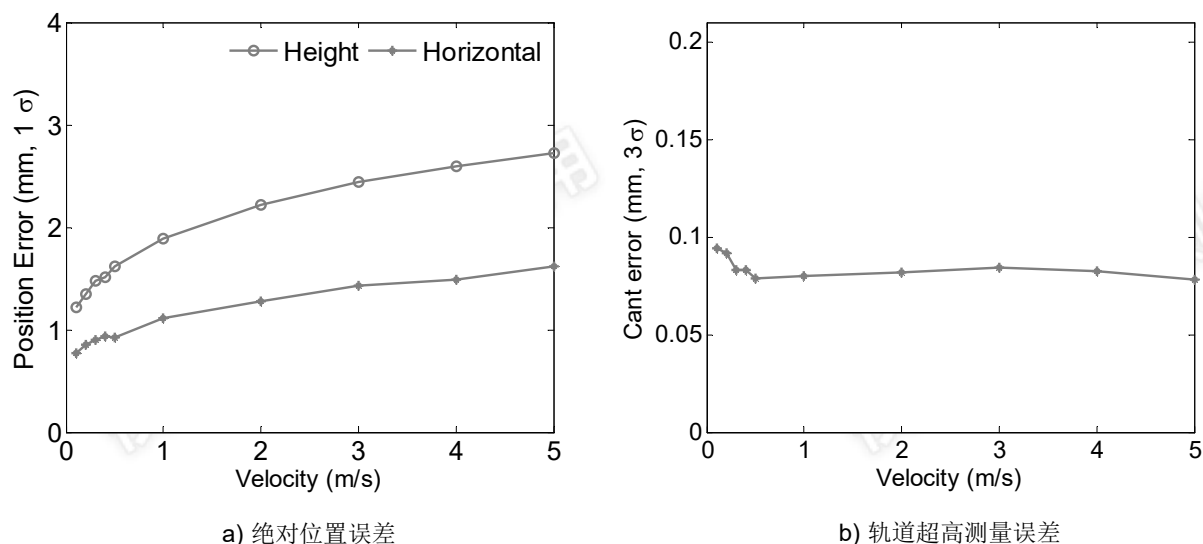


图 3-26 绝对位置误差和轨道超高测量误差与运动速度的关系

### 3.4.5 A-INS 轨道测量误差定量分析小结

文章 3.3 节基于 A-INS 误差传播模型分析了测量误差序列的随机过程特性，3.4 节则在此基础上进一步定量分析了 A-INS 轨道不平顺的测量精度和影响测量精度的主要误差因素。通过上述分析，可以得出以下结论：

- (1) 导航级惯导在厘米级 GNSS 位置辅助且合理使用非完整性约束的情况下，正向滤波的导航结果也能满足高铁轨道不平顺测量的各项精度指标。
- (2) 合理使用非完整性约束对于提高 A-INS 轨道不平顺测量精度作用明显。如果不使用非完整性约束，仅依靠厘米级的 GNSS 位置修正，A-INS 组合导航系统难以满足高铁轨道不平顺测量的精度要求。
- (3) 在合理和充分使用非完整性约束的前提下：陀螺零偏和陀螺白噪声是影响轨



向和高低不平顺的主要误差因素，但它们对轨道超高的测量几乎没有影响；相反，加速度计零偏误差和加速度计白噪声对轨向和高低不平顺测量精度的影响可忽略不计，但对轨道超高的测量影响显著。真正决定 A-INS 轨检小车轨道不平顺测量精度的是惯导的姿态精度，本质上是陀螺的器件误差。

(4) 在设定非完整性约束观测噪声强度的前提下，提高运动速度能够一定程度地改善 A-INS 相对测量精度，并且直接提高作业效率。

需要指出的是本章所有的误差分析都是针对 A-INS 组合导航正向滤波解算过程，最优平滑与正向滤波的对比将在第 5 章中给出。

### 3.5 本章小结

本章针对铁路轨道几何状态精密测量这一特殊应用，建立了 A-INS 测量误差传播模型，并基于该模型对轨道测量误差做了定量分析和研究。首先，从轨道不平顺的定义出发，分析其测量精度与 A-INS 误差之间的关系，明确了误差分析的研究对象。针对铁路轨道测量应用对惯导误差微分方程进行简化后，A-INS 组合导航连续时间间接卡尔曼滤波达到稳态时可当作线性时不变系统；研究该系统的传递函数作为建立 A-INS 误差传播模型的基本方法。然后，基于这一思路建立了 A-INS 组合导航系统高程通道和水平通道的误差传播模型，得到了拉普拉斯域内测量误差与误差源之间的关系表达式。最后，基于建立的误差传播模型，分析了 A-INS 测量误差的随机过程特性，并对轨道几何参数测量误差做了定量分析。分析结果如下：一方面，指出了导航级惯导在厘米级 GNSS 修正的情况下，只要合理和充分使用了非完整性约束，A-INS 轨检小车能够满足高铁轨道不平顺测量的各项精度指标，并进一步评估了非完整性约束对 A-INS 测量精度的重要贡献；另一方面，定量分析了惯性传感器误差和小车运动速度对轨道测量精度的影响，指出了影响轨道不平顺测量精度的主要误差源，为 A-INS 轨检小车的具设计提供了理论指导。

## 4 A-INS 测量误差传播模型仿真验证

### 4.1 引言

第 3 章建立了 A-INS 轨道测量误差传播模型，基于该模型对轨道测量误差做了定量分析，提供了一种 A-INS 轨道测量误差的理论分析方法。本章将通过数据仿真的方法来验证 A-INS 测量误差传播模型和误差传播分析的正确性和有效性，思路如图 4-1 所示。仿真带有误差的 IMU 数据和观测值，误差参数与第 3 章理论分析中的设置一致。对仿真的数据进行组合导航解算，与仿真的参考真值进行对比得到导航误差和轨道几何参数（如轨道不平顺）测量误差。最后与第 3 章的导航误差和轨道不平顺测量误差的理论分析结果进行对比，以此来验证理论模型的正确性。

本章的主要内容安排为：4.2 节介绍用于验证误差传播模型所采用的 GNSS/INS 组合导航数据仿真器及仿真数据的处理方法。4.3 节对 A-INS 测量误差及轨道不平顺测量误差等几个关键性指标进行对比验证，来验证理论模型的正确性。这几个关键指标具体包括：A-INS 位置误差的 Allan 方差、A-INS 位置误差统计值及轨道不平顺测量误差统计和概率分布。在此基础上，进一步通过仿真测试的方法来说明非完整性约束对轨道测量精度的贡献；讨论 GNSS 位置修正的更新率对测量精度的影响，这些关乎 A-INS 轨道测量系统的实际使用效果。

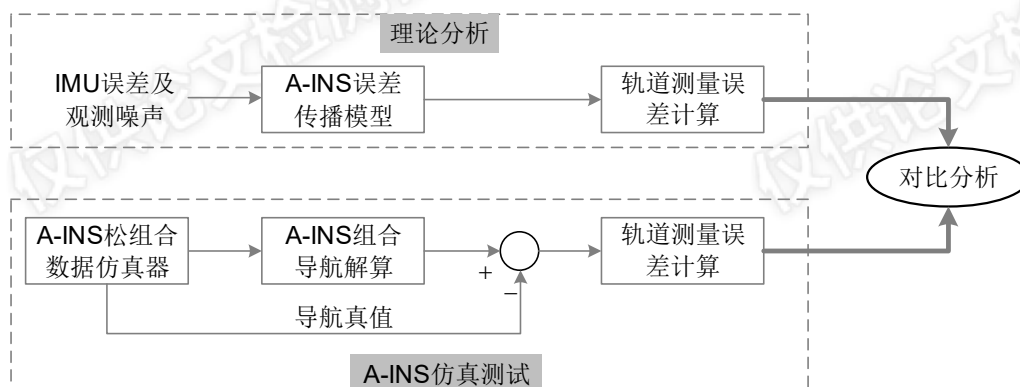


图 4-1 A-INS 误差传播模型仿真验证思路

### 4.2 A-INS 数据仿真与处理

由于高铁轨道不平顺测量精度要求很高，直接对 A-INS 组合导航系统的轨道测量精度进行充分全面的实测验证比较困难，因为难以获取有效的参考真值。采用仿真测试的方法来验证理论模型的正确性是比较可取的方案。下面将首先介绍数据仿真器、数据仿真策略及仿真数据的处理方法。

## 4.2.1 A-INS 松组合数据仿真

### 4.2.1.1 GNSS/INS 松组合数据仿真器

GNSS/INS 松组合数据仿真器为武汉大学卫星导航定位技术研究中心导航组开发的数据仿真软件。该仿真器能够根据设定的运动状态，生成对应于该轨迹的 IMU 原始数据、GNSS 导航结果（位置和速度）和相应的参考真值等数据文件。仿真器的总体设计思路为：仿真器底层根据人为设定的惯导运动状态生成 IMU 的角速度和比力真值，结合设定的初始导航信息（包括位置、速度和姿态初值），使用惯性导航机械编排算法推算各时刻的导航真值。然后分别在各个层面的数据真值上加入预设的误差和噪声项，即可得到带有误差的 IMU 原始观测值和 GNSS 导航结果。

使用 GNSS/INS 数据仿真器的优点在于能够有针对性地加入特定误差项，且根据参考真值可以求得导航解算的真实误差序列。在该仿真器中 IMU 误差和 GNSS 观测误差可以根据需要仿真为白噪声、随机游走、一阶高斯马尔可夫过程等常见的随机过程序列及其组合叠加。松组合数据仿真及解算流程如图 4-2 所示，虚线框内为仿真器部分，灰色框为仿真器所需设定的参数。

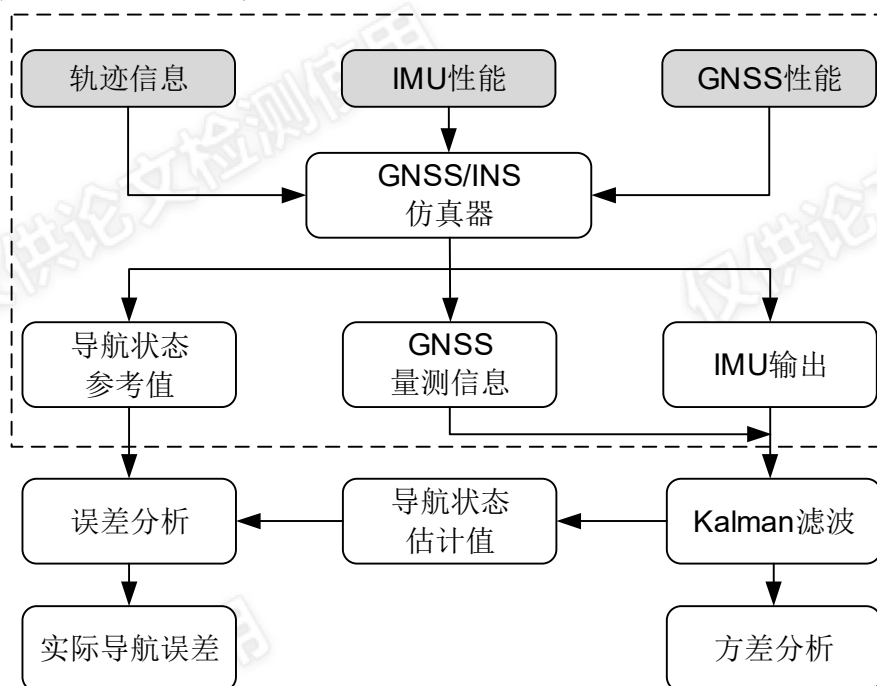


图 4-2 GNSS/INS 松组合数据仿真流程

### 4.2.1.2 载体运动状态设置

为验证 A-INS 误差传播模型的正确性，数据仿真时的载体运动状态设置与 3.2.2 节中的假设条件一致：沿着正北方向做匀速直线运动。不考虑  $b$  系与  $v$  系之间的安装误差角度，且均与  $n$  系三轴平行。惯导的具体运动状态设置如表 4-1 所示。惯导首先静止 10 min 进行静态初始对准，初始位置设置为：Lat = 30 deg；Lon=114 deg；h=20 m（武汉

的概略位置，初始位置并不明显影响 A-INS 组合导航的解算精度)。静止结束后，进行多次频繁的前向加减速来提高航向角的可观测性(Li, Chen et al. 2012)，使得 GNSS/INS 组合导航卡尔曼滤波尽快收敛达到稳态。之后，轨检小车以 1 m/s 的速度保持匀速直线运动 12000 s，后续我们只对这一匀速直线运动时段的测量误差进行分析。

表 4-1 惯导的运动状态设置

时间 (s)	运动状态
1~600	静止 (初始航向角 0)
600~620	匀加速 (加速度 4 m/s <sup>2</sup> )
620~640	匀加速 (加速度 -4 m/s <sup>2</sup> )
640~660	匀加速 (加速度 4 m/s <sup>2</sup> )
660~680	匀加速 (加速度 -4 m/s <sup>2</sup> )
680~700	匀加速 (加速度 4 m/s <sup>2</sup> )
700~720	匀加速 (加速度 -4 m/s <sup>2</sup> )
720~725	匀加速 (加速度 0.2 m/s <sup>2</sup> )
725~12800	匀速运动

#### 4.2.1.3 误差参数设置

惯性传感器误差和 GNSS 位置观测噪声的设置与理论分析保持一致，参考表 3-2 进行设置。GNSS/INS 松组合数据仿真器根据运动轨迹生成对应的比力和角速度真值，在此基础上添加惯性传感器误差，包括加速度计和陀螺的零偏误差和白噪声，不考虑比例因子误差。其中零偏误差均建模为一阶高斯马尔可夫过程，由相关时间和均方根两个参数来定义，白噪声则给定了对应的连续时间功率谱密度。GNSS 位置观测噪声建模为白噪声过程，且不考虑 GNSS 速度辅助。

第 3 章的误差传播模型是以 A-INS 连续时间间接卡尔曼滤波为对象建立的，即意味着辅助信息的更新率与惯导的原始数据采样率一致（连续时间卡尔曼滤波）。因此，在本章的仿真测试中，GNSS 位置与 IMU 原始数据的采样率保持一致，均按 200 Hz 进行输出。

#### 4.2.2 仿真数据处理

仿真测试得到的带有误差的 IMU 数据和 GNSS 位置观测值采用自主开发的 InsRail 软件（详细介绍见 5.3 节）进行组合导航解算。InsRail 软件的松组合解算以卡尔曼滤波为基础，能够进行正向卡尔曼滤波和最优平滑解算（双向）。第 3 章的误差传播模型和误差定量分析均以 A-INS 正向卡尔曼滤波解算结果为研究对象，同样用 InsRail 软件对松组合仿真数据的处理也只限于正向滤波解算，而不考虑双向平滑。

由于 A-INS 组合导航的位置一般是在全球坐标系下进行解算，而轨道控制网、轨道设计线型都是在地方独立坐标系中定义的。因此，需要对 A-INS 得到的位置坐标序列进行坐标系统的变换。本文对 A-INS 的仿真结果进行基于膨胀椭球的任意带高斯投影变换，中央子午线经度设置为设计轨迹所在的平均经度，由于惯导的设计轨迹为沿着正北做直线运动，则高斯投影之后的平面轨迹没有投影变形。对于高程分量，A-INS 组合导航得到的是大地高（椭球高），而实际轨道施工和测量采用的是正高系统，两个高程系统之间存在差异。但是在几百米的范围内（长波不平顺或超长波的尺度）两个高程系统的高程差异可以近似为常值，不会影响 A-INS 轨道不平顺的测量精度及误差评估。

最后，A-INS 组合导航结果跟仿真器输出的参考真值相减，计算位置误差和轨道不平顺测量误差。

### 4.3 A-INS 误差传播模型验证

下面将通过对比几个关键性指标来验证第 3 章的 A-INS 误差传播模型的正确性。首先，验证仿真测试的位置误差特性与理论分析结果之间的一致性。然后对轨道不平顺的测量误差进行对比，并通过仿真结果来进一步验证非完整性约束对于轨道测量精度的影响。

#### 4.3.1 A-INS 误差随机特性验证

3.3 节用 Allan 方差和功率谱密度（PSD）的方法从理论上对 A-INS 位置误差的随机过程特性进行了分析，从 Allan 方差和 PSD 曲线中有效辨识了误差序列中的主要噪声类型。下面将计算 A-INS 仿真结果中位置误差的 Allan 方差，得到相应的 Allan 曲线，并与理论分析的结果进行对比。

A-INS 松组合仿真测试的位置误差序列（东向位置误差和高程误差）如图 4-3 所示。分别计算东向位置误差和高程误差的 Allan 方差，得到对应的 Allan 标准差曲线，如图 4-4 所示。可以看出仿真结果的位置误差 Allan 方差曲线也是一条斜率接近+1/2 的直线，并且与理论分析的 Allan 方差曲线几乎完全重合，二者具有很好的一致性。在曲线末端理论 Allan 曲线与仿真测试曲线差异大一些，这可能是因为曲线末端本身的 Allan 方差计算误差较大。因此，第 3.3 节对 A-INS 测量误差随机过程特性的分析是合理和正确的。

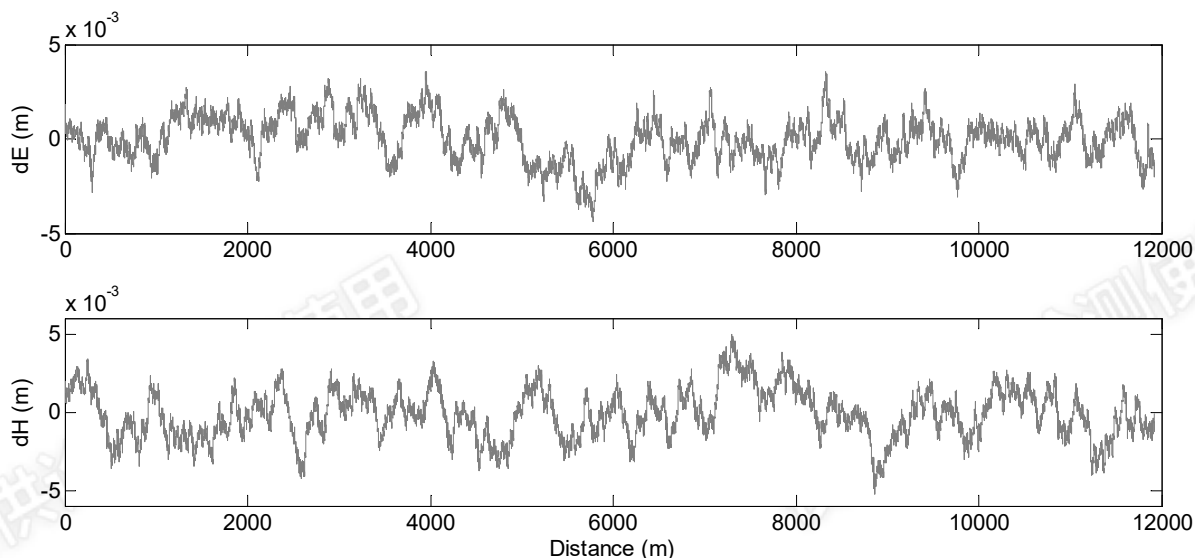


图 4-3 A-INS 仿真测试的位置误差序列

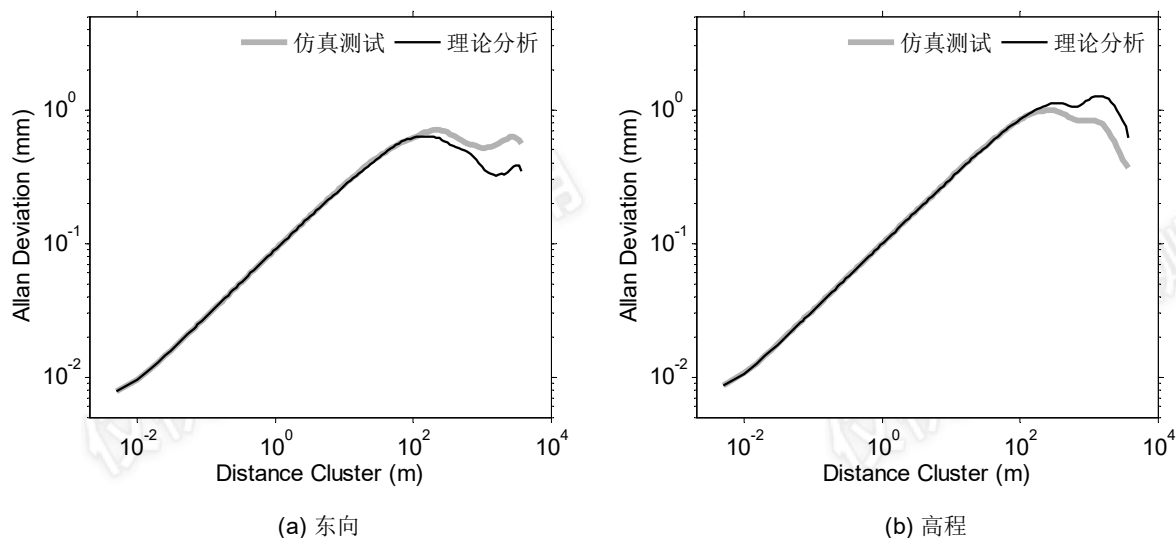


图 4-4 A-INS 仿真测试的位置误差 Allan 曲线与理论分析结果对比

### 4.3.2 轨道不平顺测量精度验证

3.4.1 节对导航级惯导在 GNSS 位置和非完整性约束辅助下的绝对位置误差及轨道不平顺测量误差进行了统计分析。理论分析的结果表明轨道不平顺测量误差近似服从高斯分布，从而可以通过分析其概率分布来评估 A-INS 的实际测量能力。同样的分析方法应用于仿真测试结果，对轨道不平顺的测量误差概率分布进行统计，如图 4-5 和图 4-6 所示。可以看出轨向不平顺和高低不平顺测量误差均服从高斯分布，与理论分析结果一致。表 4-2 对比了理论分析与仿真测试得到的位置和轨道不平顺测量误差的统计参数，结果表明理论分析的结果与仿真测试结果之间的一致性大于 85%，具有很好的一致性。

此外，从表中可以看出，3.4.1 节根据理论分析得到的轨道不平顺测量误差略大于

仿真测试的结果。这是因为在理论分析时对惯导误差微分方程（A-INS 组合导航状态方程）和 A-INS 的观测方程做了简化，使得各通道解耦；这给理论分析带来了方便却也弱化了误差之间的相关性，引入了额外的误差。但是仿真测试的 IMU 数据是用 InsRail 软件处理的，其卡尔曼滤波的状态方程和观测方程均未做任何简化，考虑了各通道之间的耦合性。因此，理论分析与仿真测试得到的短波轨道不平顺测量误差之间存在 0.2 mm 左右的差异是完全有可能的。

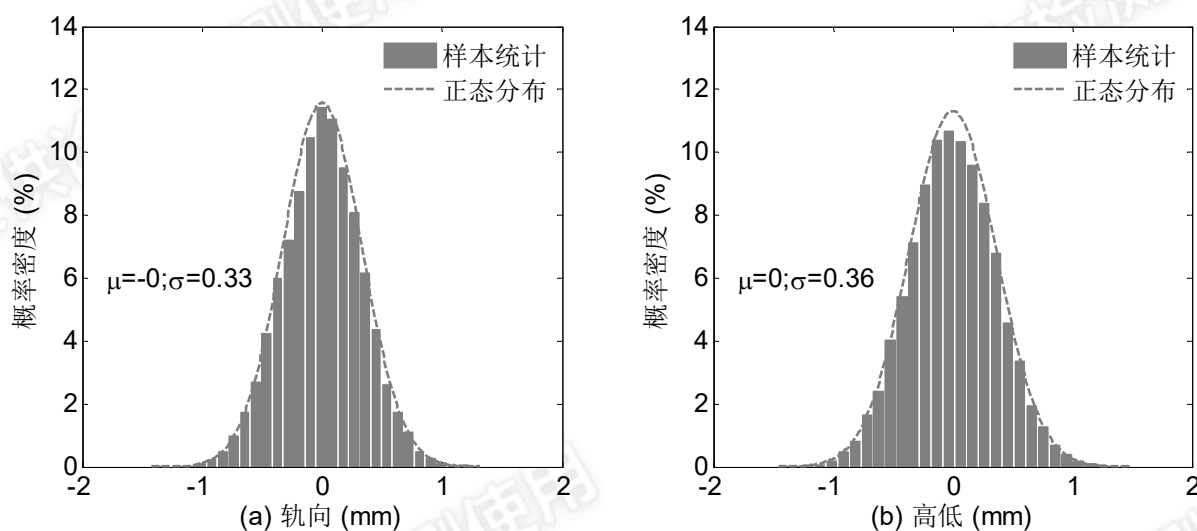


图 4-5 A-INS 仿真测试的短波轨道不平顺测量误差概率分布

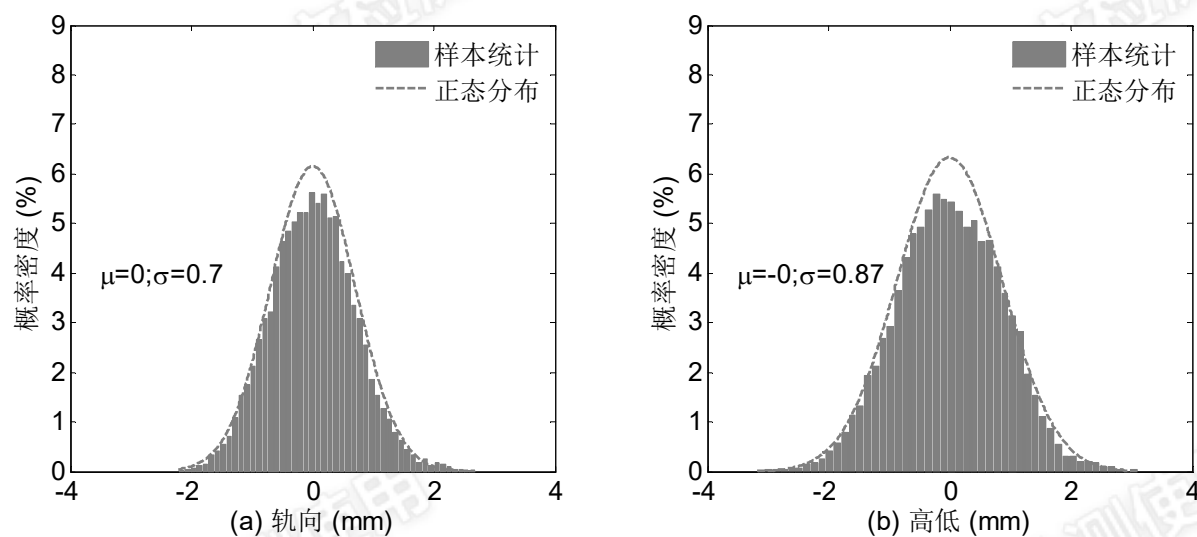


图 4-6 A-INS 仿真测试的长波轨道不平顺测量误差概率分布

表 4-2 A-INS 轨道测量的理论误差与仿真测试结果对比

项目		理论分析	仿真验证	符合度
位置误差 (mm, 1 $\sigma$ )	东向	1.2	1.17	97 %
	高程	1.91	1.56	82 %
短波不平顺测量误差 (mm, 3 $\sigma$ )	轨向	1.02	0.99	97 %
	高低	1.29	1.09	85 %
长波不平顺测量误差 (mm, 3 $\sigma$ )	轨向	2.24	2.09	93 %
	高低	3.01	2.62	87 %

综上，仿真验证的结果充分表明，A-INS 误差传播模型及误差定量分析结果与仿真测试结果之间具有很好的吻合度，本文建立的 A-INS 误差传播模型是正确的。

### 4.3.3 非完整性约束的影响验证

3.4.2 节以高程通道为例分析了非完整性约束辅助对 A-INS 轨道测量精度的作用，理论分析说明非完整性约束能够显著改善 A-INS 的相对测量精度。本小节通过仿真测试的方法对这一结论进行验证：A-INS 仿真的惯导数据只进行 GNSS 位置修正，而不使用非完整性约束辅助，根据组合导航解算结果计算对应的轨道不平顺，其测量误差的概率分布如图 4-7 和图 4-8 所示。

比较图 3-16 (a)与图 4-7 (b)，及图 3-16 (b)与图 4-8 (b)可以看出理论分析的结果与仿真测试的结果均有很好的 consistency。仿真结果强有力地验证了非完整性约束辅助对于提高 A-INS 轨道测量精度的重要作用。

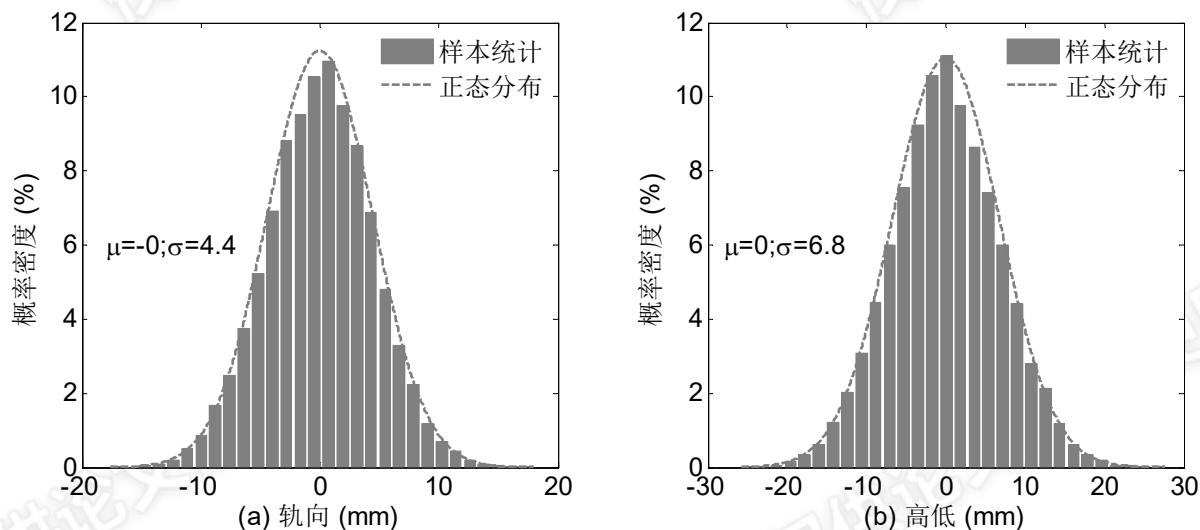


图 4-7 无 NHC 辅助时短波不平顺（仿真）测量误差概率分布



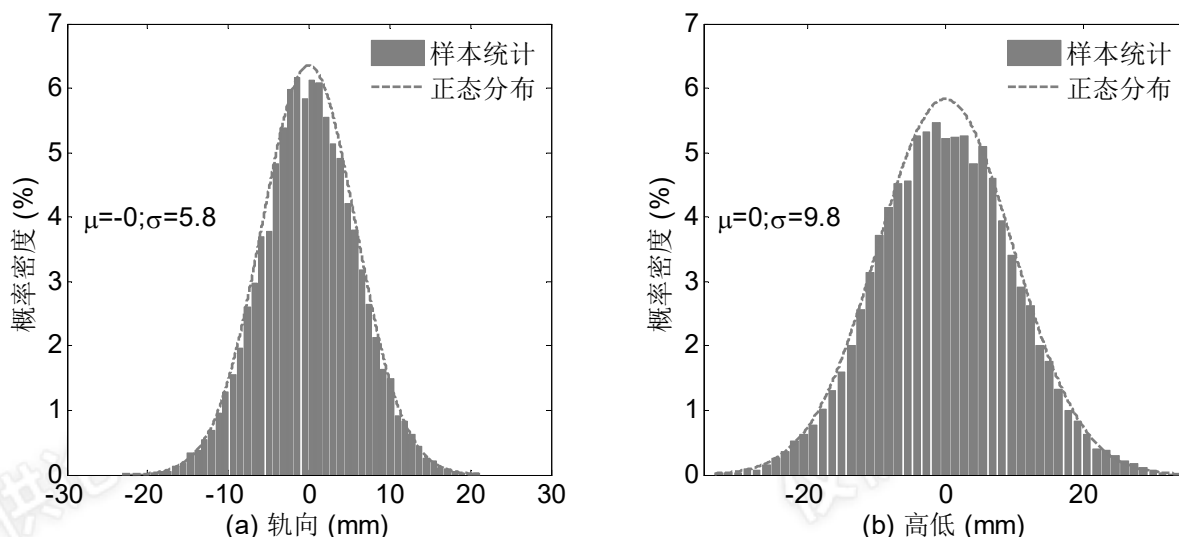


图 4-8 无 NHC 辅助时长波不平顺（仿真）测量误差概率分布

#### 4.4 GNSS 更新率对测量精度的影响

第 3 章的误差传播模型及误差理论研究均是基于 A-INS 连续时间卡尔曼滤波进行分析的，假设辅助信息的更新率与 IMU 数据采样率一致。实际应用中 GNSS 位置或全站仪位置对惯导的修正频率往往远低于 IMU 的数据率，例如通常采用 1 Hz 的 GNSS 的位置观测值与 200 Hz 的 IMU 数据进行融合解算。那么 1 Hz 的 GNSS 位置修正与 200 Hz 的位置修正是否对最终的轨道测量精度有显著的影响？这影响着 A-INS 轨检小车的实际应用。

另一方面，钢轨对轨检小车运动状态的非完整性约束总是成立的，虚拟速度观测值可以以很高的频率对惯导进行修正。因此，在仿真验证中，我们根据表 3-2 给定的 GNSS 位置观测噪声的连续时间功率谱密度，将 GNSS 位置观测值的采样率降低至 1 Hz；而非完整性约束仍按 200 Hz 的频率对导航结果进行修正。

图 4-9 和图 4-10 分别给出了在 1 Hz GNSS 位置更新下的 A-INS 轨道不平顺测量误差统计。对比图 4-5 和图 4-9 可以看出，GNSS 位置更新率采用 200 Hz 或 1 Hz 对惯导进行辅助修正时，轨道不平顺测量误差的差异很小。当 GNSS 更新率从 200 Hz 降低至 1 Hz 时，短波轨向不平顺测量误差的标准差增大了 0.01 mm；短波高低不平顺测量误差的标准差增大了 0.02 mm，均可忽略不计。对比图 4-6 和图 4-10 可以看出，当 GNSS 更新率从 200 Hz 降低至 1 Hz 时，长波轨向不平顺测量误差的标准差增大了 0.1 mm；长波高低不平顺测量误差的标准差增大了 0.03 mm，可以认为没有差异。

综上所述可以看出：当有高频非完整性约束辅助时，在保持 GNSS 观测噪声功率谱密度不变的情况下，GNSS 更新率降低至 1 Hz 时，轨道不平顺测量精度无明显变化。

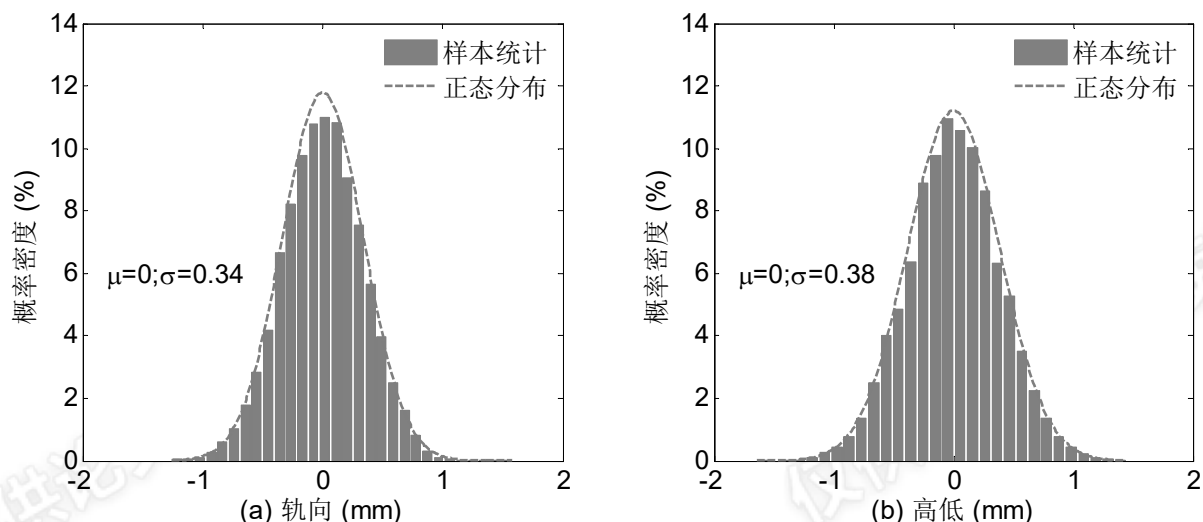


图 4-9 仿真测试的短波轨道不平顺测量误差概率分布 (GNSS 1 Hz 更新, NHC 200 Hz 更新)

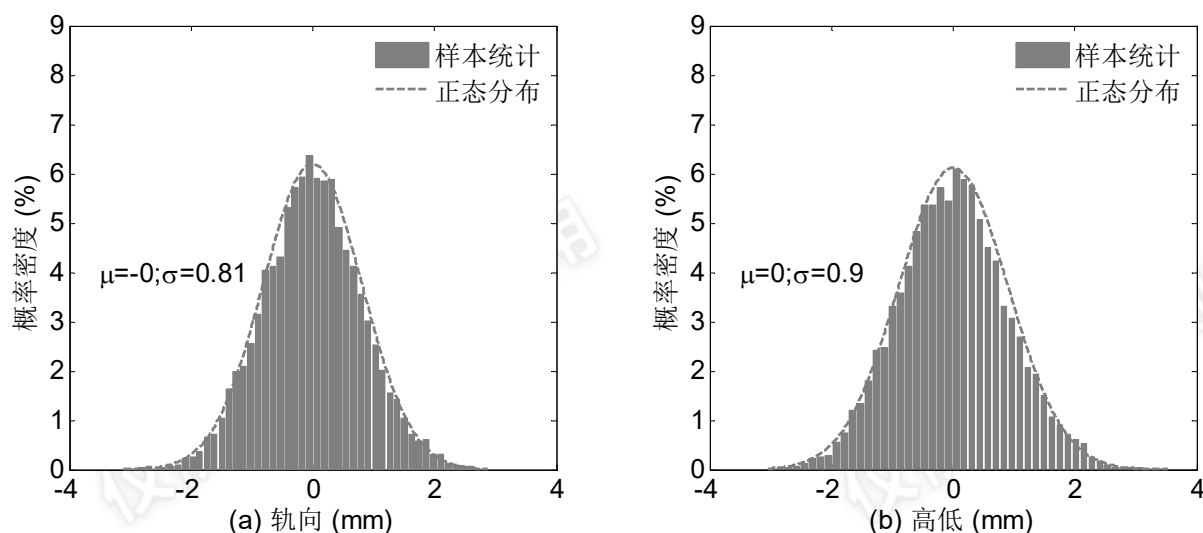


图 4-10 仿真测试的长波轨道不平顺测量误差概率分布 (GNSS 1 Hz 更新, NHC 200 Hz 更新)

## 4.5 本章小结

本章以数据仿真的方法对第 3 章建立的 A-INS 轨道测量误差传播模型和误差理论分析结果进行了验证。首先,介绍了 A-INS 松组合数据仿真的基本原理、仿真数据的处理方法以及理论模型验证的具体思路。然后,对 A-INS 绝对位置误差、位置误差的随机过程特性(用 Allan 方差来表征)及轨道不平顺测量精度进行了验证。仿真验证的结果表明:A-INS 测量误差的理论分析与仿真测试结果之间具有很好的一致性,验证了 A-INS 误差传播模型和基于该模型的误差定量分析的正确性。最后,对非完整性约束和 GNSS 位置修正频率对最终测量精度的影响做了进一步验证。仿真结果印证了非完整性约束在提高轨道不平顺测量精度上的重要性;同时也表明,在合理和充分使用非完整性约束辅助的情况下,将 GNSS 位置修正频率降低到 1 Hz 并不会影响最终的轨道测量精度。

## 5 A-INS 轨检小车原型设计与实测验证

### 5.1 引言

正如本文第 1 章所提出的,设计基于 A-INS 组合导航技术的轻型便携式轨道几何状态测量仪(简称 A-INS 轨检小车),实现高铁轨道几何状态的快速精密测量是本文的一个主要研究目标。为此,本文首先对 A-INS 轨道测量误差进行了定量分析,从理论上论证方案的可行性,然后通过数据仿真测试来验证理论模型的正确性。本章将介绍 A-INS 轨检小车的硬件原型系统设计实现及轨道测量数据处理中的关键算法,并对该原型系统开展实测验证,评估系统的测量精度及对误差传播模型的关键指标进行论证。

本章首先介绍 A-INS 轨检小车的硬件系统设计思路,包括传感器选型、系统集成和数据同步采集方案;并阐述轨道测量数据处理软件的设计思路及关键算法;然后通过实验来验证轨道几何状态的各项测量指标,从内符合和外符合精度两方面来验证系统的精度及方案的可行性;最后给出 A-INS 轨检小车在实际工程中的应用效果。

### 5.2 轨检小车硬件系统设计

A-INS 铁路轨道几何状态测量系统(简称 A-INS 轨检小车)将测量传感器集成搭载在特殊设计的小车车体上构成整个系统的硬件平台,如图 5-1 所示,两个测量人员即可轻松完成上道、下道和小车现场拼装与拆卸等操作。作业人员以步行的速度推动 A-INS 轨检小车进行动态测量,也可使用动力设备;测量过程中不要求小车匀速运动,也无最低速度限制,但最高速度不超过 5 m/s。A-INS 轨检小车以惯性导航系统为核心测量设备,进行定位定姿测量,同时配备了轨距和里程计等传感器。测量过程中,A-INS 轨检小车在轨道上运动,各测量传感器同步采集、记录原始测量数据;然后送至多传感器数据融合软件中进行定位定姿解算,确定小车车架运动的六个自由度信息(三维位置和姿态);结合实测轨距可计算出轨道中线和左右钢轨的三维坐标。结合轨道设计线型计算出左右钢轨在轨向和高低方向上的偏差量(指轨道变形量,而非测量误差);进一步得到水平、扭曲、轨距递变率、水平递变率等各项轨道几何参数。

下面将分别介绍 A-INS 轨检小车的主要硬件系统结构:小车车体,测量传感器,和数据采集系统。



图 5-1 A-INS 铁路轨道几何状态测量系统（简称 A-INS 轨检小车）

### 5.2.1 轨检小车车体

惯导及 A-INS 组合导航为非接触式测量技术，小车车体则在钢轨与惯导之间起着桥梁性的机械传递作用。小车车体的行走轨迹线必须能够准确地反映轨道的实际几何形状，并对轨道不平顺的激扰做出正确的动态响应。轨道不平顺引起小车车体运动状态的变化，并被惯导所感知是整个系统测量原理的基础，小车车体在运动过程中的稳定性及与钢轨之间的连续刚性接触是保证 A-INS 轨检小车测量精度的前提条件。

#### 5.2.1.1 小车车体设计

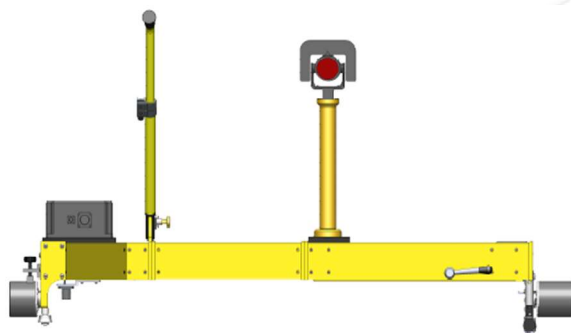


图 5-2 小车车架侧视图

为保证轨检小车能够在轨道上平稳行进，参考铁路轨检设备规范(CN-TB 2012)，轨检小车车体外形采用“T”字形结构设计。小车车体为刚性结构，要求运动过程中车体的变形量以及车体重复拼装的误差远小于 A-INS 的测量误差。设备出厂之前，需要在专业的检校台上用专业的测量仪器（如千分表等）对小车车体的刚性及受力变形量进行计量检核(CN-JJG 2013)。小车的三个行走轮与车体固联，车体的自身重力使得行走轮与钢轨顶面在垂向上保持刚性接触，接触点的连线构成了小车的行走轨迹线。双轮梁一侧设计了两个侧轮与车体固联，其轮轴与对应的行走轮轮轴共面，形成导向轮。单轮梁上

的侧轮轮轴安装在伸缩杆上形成活动端，伸缩杆的弹簧产生一个与小车横梁平行的作用力，将三个侧轮紧压在钢轨内侧面上，使得侧轮在运动过程中与钢轨保持横向密贴。要求运动过程中侧轮和行走轮在横垂方向上与钢轨之间的缝隙（不密贴幅度）不能大于 0.2mm，否则小车的运动轨迹和姿态将无法反映轨道的真实几何形状。相比于法兰轮，采用侧轮的设计可以有效减小运动过程中的轮缘磨损，但需保证侧轮结构能顺利通过道岔。根据铁路轨检设备规范(CN-TB 2012)，要求 A-INS 轨检小车“正推”和“反推”的测量结果一致，且精度达标。

根据上述要求，我们设计并实现了专用的 A-INS 轨检小车的车体。并在小车双轮一侧的行走轮上设置了刹车转置，使得小车具备了很好的静止能力，能为惯导的静态初始对准提供良好的静止条件。

### 5.2.1.2 尺寸标定

惯性导航系统的测量参考点为 IMU 测量中心，根据惯导的测量结果（三维位置坐标和姿态）推算钢轨的坐标序列需要知道轨检小车的各项尺寸参数；包括：GNSS 天线杆臂，里程计杆臂，棱镜杆臂，轨枕识别器杆臂和行走轮与钢轨接触点的杆臂。以 GNSS 天线杆臂为例，是指 IMU 测量中心指向 GNSS 天线相位中心的向量，一般投影分解在惯性传感器坐标系（ $b$  系）下，如图 5-3 所示。

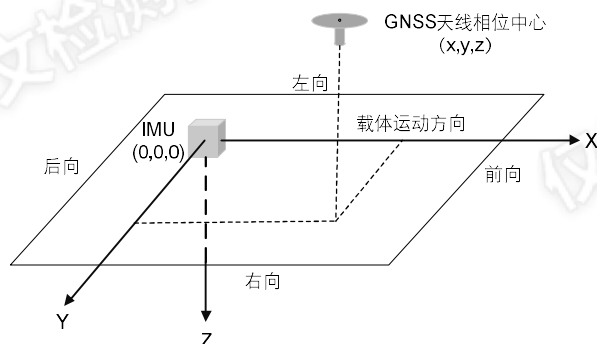


图 5-3 GNSS 天线杆臂示意图

上述尺寸参数可以在轨检小车机械设计图中获取，实际精度通过精密的机械加工来保证。IMU 的测量中心一般是指三轴加速度计敏感轴的交点，但并不一定是惯导外壳的几何中心，惯导厂家一般会提供这一参数。如果选取惯导外壳的某个参考点作为 IMU 的测量中心，则需对内杆臂尺寸效应进行标定和补偿(严恭敏, 严卫生 et al. 2008, 吴文启, 杨伟光 et al. 2009)。

## 5.2.2 传感器功能与选型

### 5.2.2.1 惯性导航系统

惯性导航系统是 A-INS 轨检小车的核心测量设备，A-INS 轨检小车原型系统采用了武汉迈普时空导航科技有限公司生产的 MP-POS830，如图 5-1 所示。MP-POS830 是

一款捷联式组合导航系统,包含惯性导航部件和卫星导航部件两大部分。惯性导航部件,即惯性测量单元 IMU,由 3 个单轴激光陀螺仪、3 轴高精度石英挠性加速度计、减振器以及安装机械构件组成。MP-POS830 所使用的陀螺仪为中高精度 50 型环形机抖激光陀螺,其逐次上电零偏重复性优于 0.01 deg/h,单次上电零偏稳定性优于 0.01 deg/h。加速度计为高稳定性石英加速度计,逐次上电零偏重复性优于 8 mGal,单次上电零偏稳定性优于 10 mGal。内置的卫星导航部件为加拿大 NovAtel 公司的 OEMV-1DF GPS 板卡,是一款紧凑型、低功耗的双频测量型 GPS 板卡。

MP-POS830 以增量形式输出陀螺和加速度计的原始测量值,用于后续的组合导航解算。在有 GNSS 信号的情况下,可输出 GNSS 原始观测值文件;在 GNSS 信号中断时,MP-POS830 起到惯性测量单元的作用。

表 5-1 MP-POS830 的主要性能指标

工作性能	定位精度 (PPK)	$\leq 0.05 \text{ m } (1 \sigma)$
	航向误差 (组合后处理)	$\leq 0.005 \text{ deg } (1 \sigma)$
	姿态误差 (组合后处理)	$\leq 0.003 \text{ deg } (1 \sigma)$
	纯惯性位置误差	1.0~3.5 nm/h
陀螺仪	零偏	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	零偏稳定性	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	零偏重复性 (逐次上电)	$\leq 0.01 \text{ deg/h}$
	非线性	$\leq 10 \text{ ppm}$
加速度计	零偏	$\leq 25 \text{ mGal}$
	零偏稳定性	$\leq 10 \text{ mGal}$
	零偏重复性 (逐次上电)	$\leq 8 \text{ mGal}$
	非线性	$\leq 10 \text{ ppm}$
测量范围	角速度	$\pm 300 \text{ deg/s}$
	加速度	$\pm 10 \text{ g}$ (可定制)
GNSS 板卡	型号	NovAtel OEMV-1DF
物理特性	尺寸	190 × 190 × 183 mm
	重量	$\leq 8.5 \text{ kg}$

### 5.2.2.2 轨距传感器

轨距尺实质上就是一个距离传感器,安装在小车车体的横梁上,通过测量伸缩杆端弹簧长度变化来测量轨距变化值。测量过程中伸缩杆的弹簧始终处于压缩状态,轨距轮顶住钢轨内侧,其反作用力将双轮梁一侧的侧轮顶向另一股钢轨内侧,保持横向密贴性。

实测轨距的计算公式为式(5.1),其中  $d$  为实测轨距值,  $d_1$  为固定长度值,  $d_2$  为轨距尺的长度测量值,  $\Delta d$  和  $K_T T$  则为实测轨距的改正项。其中  $K_T T$  为温度补偿改正项,由轨检仪材料热膨胀系数随温度改变所致,温度  $T$  由内置的温度传感器提供。轨距的曲

线改正原理如图 5-5 所示，其幅度等于双轮连线的中点到轨道的距离，即正矢值如式 (5.2)，其正负号与轨道的偏向及小车的摆放姿态有关（即双轮梁是摆放在左轨还是右轨）。易知，在直线段曲线修正值为 0。

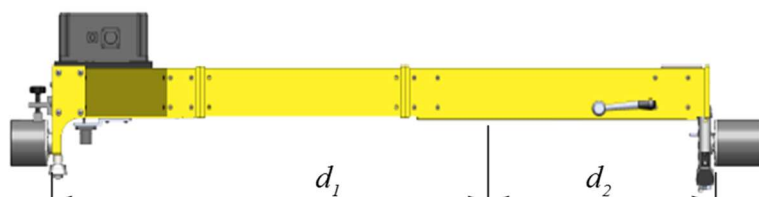


图 5-4 轨距测量原理

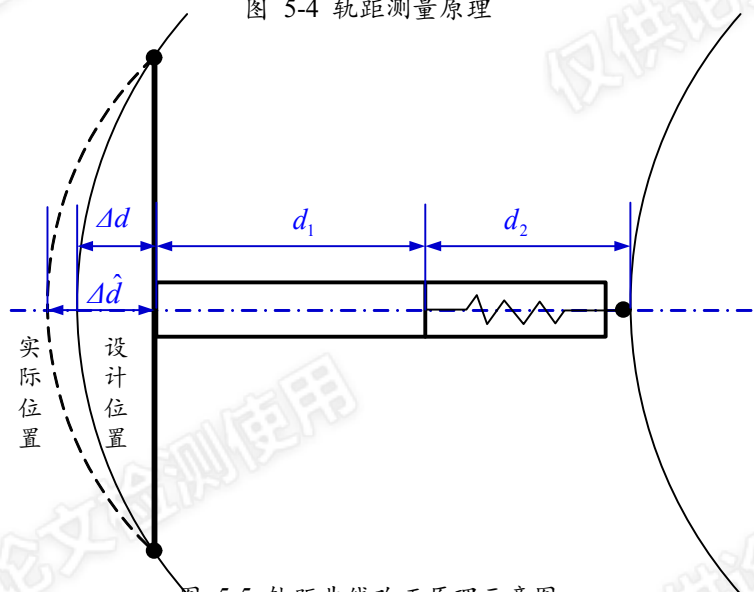


图 5-5 轨距曲线改正原理示意图

$$d = d_1 + d_2 + \Delta d + K_T T \quad (5.1)$$

$$|\Delta d| = R - \sqrt{R^2 - d_w^2/4} \quad (5.2)$$

式中， $R$  为轨道的曲率半径，可根据轨道的设计线型计算得到。 $d_w$  为双轮梁两个侧轮的轮间距。从图 5-5 可以看出，当实际轨道偏离设计位置时，进行曲线理论改正之后并不能反映真实的轨距（ $\Delta d$  与  $\Delta \hat{d}$  的区别），最佳方案应该是在双轮梁上也固联一个伸缩杆，对曲线改正量进行实测。通常情况下，高铁轨道曲率半径很大，曲线的理论改正值很小。

轨距传感器将距离的变化记录为电压值，实测轨距与实测电压值之间呈线性关系，如式(5.3)。当轨距尺侧轮出现较严重磨损之后，需要对上述参数进行重新标定。例如：在轨距侧轮与钢轨内侧之间加入不同厚度的量块，得到电压和实际轨距的一系列观测值，通过最小二乘拟合即可求解上述线性参数。

$$d_i = k v_i + b \quad (5.3)$$

式中， $d_i, v_i$  分别为实际轨距和实测轨距电压值， $k, b$  为两个待求的线性参数。

### 5.2.2.3 里程计

里程是轨道测量中的一个重要参考基准，轨道测量参数都要赋予准确的里程信息。A-INS 轨检小车在横梁上的行走轮侧面安装了一对霍尔传感器，通过记录行走轮转动的圈数来计算行走距离。两个霍尔传感器安装在同一个行走轮上还可有效地判断轨检小车的运动方向，如前进和后退。这里需要特别强调的是，里程计测量的是行走轮在某根钢轨上行走的三维距离（常称作路程），与轨道施工里程所用的中线平面里程不是同一个概念。

行走轮半径误差和转动圈数计数误差会使得里程计的里程测量值存在累积误差。里程轮的半径误差是指实际半径与标称半径不一致，可能来自于行走轮的加工误差、磨损及测量过程中有黏物吸附在行走轮表面。行走轮打滑则使得转动计数偏小，一般可通过其它绝对测量手段进行探测，如 GNSS 位置。本文设计的 A-INS 轨检小车的里程累积误差为千分之二左右，也即行走 1000 m，累计误差约为 2 m。

里程测量值是 A-INS 组合导航的一种重要的辅助信息，尤其是在 GNSS 信号中断的时候。由于存在累积误差，里程计的测量值只能作为实际里程的粗略参考。进行组合导航解算时需要对里程计的累积误差进行标定和补偿。当有连续 GNSS 位置修正时，可专门设计相应的卡尔曼滤波对比例因子误差进行估计和补偿。当 GNSS 信号中断时，可在测量过程中让小车定期与轨道附近的 CPIII 控制点对齐，来修正里程计的误差。如前所述，用里程计辅助惯导时，需要精确确定里程计的杆臂：由 IMU 测量中心指向安装霍尔传感器的行走轮与钢轨顶面的接触点。

一般的，为提高里程计测量值的可靠性，常在 A-INS 轨检小车双轮梁的某个行走轮和横梁上的行走轮上均安装里程传感器，用于相互检核。同时，根据左、右钢轨上两份不同的行走距离测量值可以计算出小车的方位角，与惯导进行组合解算，提高航向角的测量精度。

在实际测量作业过程中，应注意保持霍尔传感器的清洁，否则霍尔开关无法正确感应行走轮的转动，进而影响里程的测量精度。

### 5.2.2.4 GNSS 基站/全站仪

绝对位置修正对于维持 A-INS 组合导航系统的相对测量能力和系统精度，绝对里程定位具有重要意义。A-INS 轨检小车原型系统兼容两种不同的绝对位置修正方案：可根据不同的应用场景选用 GNSS 或全站仪进行绝对位置修正。

在 GNSS 信号良好的情况下，采用基于载波相位的动态后处理模式（Post Processed Kinematic, PPK）进行 GNSS 解算获得高精度的绝对位置修正。其作业模式为：将一台 GNSS 接收机设置于坐标已知的控制点（如线路控制网 CPII 点）上，观测视场中所有的可见卫星，轨检小车上 POS830 的内置 GNSS 接收机为移动站。基站接收机与移动站接



收机进行同步观测，由于采用后处理模式，基站与流动站接收机之间无需进行实时数据通讯。用 InsRail 软件（见 5.3 节）进行短基线 PPK 解算，可实现 1~2cm 的绝对定位精度。A-INS 轨检小车原型系统的 GNSS 基站和移动站数据率均设置为 1 Hz。为保证测量精度，在测量作业中应注意以下问题：

(1) 基站到流动站之间的基线长度不宜超过 15 km。

(2) 选取观测条件较好的 CPII 控制点作为基准站；保证测站附近反射物较少，多路径效应不明显，或者使用带抑径圈的 GNSS 天线。

(3) GNSS 原始数据采样率不低于 1Hz。

在 GNSS 信号被遮挡或完全中断的情况下，如隧道中，则无法采用 GNSS 来提供绝对位置修正，此时 A-INS 轨检小车可配置为全站仪测量修正模式。全站仪架设在线路附近，在轨道控制网下自由设站，测量轨检小车上棱镜坐标来提供绝对位置参考。在隧道模式中全站仪测量点可用于修正里程计的里程误差，同时非完整性约束辅助下，每个测段只需提供少量的全站仪测量值即可满足轨道不平顺的测量精度要求(牛小骥, 章红平 et al.)。

#### 5.2.2.5 轨枕识别器

高铁无砟轨道只能通过调整扣件系统来精调钢轨的轨向和高低，因此 A-INS 轨检小车的轨道测量值，如轨道调整量的输出最终要落实到具体的轨枕上。对于常规静态小车来说，这是很容易实现的，因为全站仪小车本来就是在轨枕对应的钢轨轨顶面处进行静止测量的。而 A-INS 轨检小车按时间进行高采样率测量，如何知道轨枕的里程位置并与 A-INS 测量结果进行同步至关重要。

为此，A-INS 轨检小车上设计有轨枕识别器，用于识别轨枕的位置，其基本原理为：当轨检小车经过轨枕时，轨枕识别器发出一个脉冲信号，数据采集系统记录该脉冲信号的时间，与 A-INS 轨检小车的其他传感器测量值进行时间同步。在数据后处理中，根据轨枕识别器脉冲信号的时间查找绝对位置坐标（由 A-INS 组合导航提供），进而反算出该脉冲信号（轨枕）对应的轨道里程。最终输出轨枕里程处的各项测量结果。轨道精调人员则可根据现场的轨枕编号规则，在现场找到对应的轨枕，进行精调。

轨枕识别器可采用超声波开关或反射式光电开关，通过感应垂向距离的变化来识别轨枕；或者采用磁识别开关，但是需要在轨枕上面预先布设 RFID 标签，比较麻烦。A-INS 轨检小车原型系统的轨枕识别器采用了反射式超声波传感器来识别轨枕。

由于测量现场存在比较多的干扰因素，轨枕识别器可能出现漏识别或误识别的情况，但是这可以通过与里程计的测量值或 A-INS 坐标反算的里程进行对比，有效地将其探测出来，并进行修复。

### 5.2.3 时间同步方案

各传感器测量数据之间的时间同步也是影响 A-INS 轨检小车测量精度的一个因素。一方面, IMU 与辅助信息(如 GNSS 和里程计)之间时间不同步使得组合导航解算精度下降, 甚至导致滤波器的发散(Moussa, Ali et al. 2001, Skog and Handel 2008)。另一方面, 时间不同步会带来 A-INS 组合导航结果与轨距、轨枕识别器之间的里程匹配误差。

A-INS 轨检小车原型以数据采集系统的本地时间为基准, 通过给各传感器的原始测量数据打上统一的时标来完成时间同步。鉴于各传感器的数据采样率不同(如表 5-2), 数据采集系统在每次接收到的原始数据包中插入对应的本地时间消息, 然后记录存储。虽然数据采集系统的本地时间可能存在系统偏差和时间的不稳定性, 但这一绝对误差对于所有的传感器来说都是系统性的, 并不影响传感器相互间的时间同步。当存在 GNSS 信号时, 通过 GPS 的 1 PPS 信号对本地时间进行校正, 统一到 GPS 的绝对时间系统中。1 PPS 信号是 GNSS 接收机中产生的上升沿(或者下降沿)与 GNSS 整秒时刻对齐的 1 Hz 脉冲信号。1 PPS 可以将本地时间系统与 GPS 时间对齐。特别地, 对于 GNSS 与惯导之间的时间同步, GNSS 数据与惯导数据同步提取技术通过秒脉冲使 GNSS 数据和惯导数据处于完全相同的时间域。

对于 A-INS 轨检小车, 按其最高运动速度折算, 时间不同步造成的里程同步误差不应大于 5 cm。例如, 当轨检小车以 5 m/s 的速度运动时, 时间同步误差应小于 10 ms。

表 5-2 各传感器数据采样率

传感器	数据采样率 (Hz)
IMU	200
移动站接收机	1
基站接收机	1
轨距	50
里程计	10
轨枕识别器	/

### 5.3 数据处理算法工程化与软件设计

A-INS 轨检小车的测量数据采用自主开发的 InsRail 软件进行处理, 包括 A-INS 松组合解算、轨道几何参数计算及轨道几何状态评估两个模块。之后在武汉迈普时空导航科技有限公司(简称迈普时空)的协助下增加了 GNSS PPK 精密定位解算模块, 进行了界面优化, 形成了商业版 InsRail 软件, 如图 5-6 所示。InsRail 的主要功能包括 GNSS 精密定位解算, A-INS 组合导航解算, 轨道几何状态分析三大功能, 见表 5-3。其中 GNSS

精密定位解算采用基于载波相位的差分后处理 (Post Processing Kinematic, PPK) 模式, 短基线情况下, 可实现厘米级的绝对定位。A-INS 组合导航解算采用松组合模式, 支持多种辅助信息与惯性导航的数据融合处理, 包括 GNSS 位置和速度, 里程计速度, 非完整性约束和零速修正等。轨道几何状态分析模块: 根据 A-INS 组合导航解算的结果及轨距测量值, 可提供轨道中线和左右钢轨的三维位置坐标、轨道姿态和里程, 计算得到左右钢轨的轨向、高低调整量、水平和轨距等各项几何参数; 计算轨道不平顺参数, 包括不同波长的轨向和高低不平顺, 扭曲、轨距递变率等各项参数。InsRail 能够将轨道几何参数测量值输出到对应的轨枕里程上, 其里程定位误差不大于 5 cm。软件还具有丰富的图形显示和生成报表的功能, 如图 5-7。

下面将对 InsRail 软件中 A-INS 松组合和轨道分析模块的关键算法进行介绍。

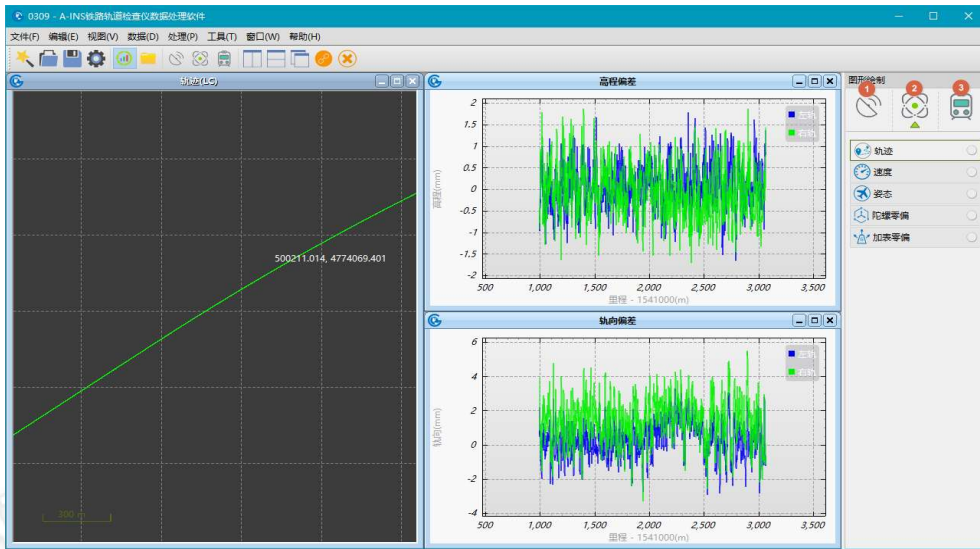


图 5-6 InsRail 软件界面

A-INS轨道几何状态测量仪数据分析 (测量时间: 2016年8月5日)																						
数据表格说明:																						
1. 灰色填充部分为无效数据 (这一部分数据不能真实反映轨道的真实情况, 主要是无法通过的平交道口、道岔部分, 或其它干扰因素造成的影响)																						
2. 红色填充部分为指标超限里程点 (轨距和水平按 2 mm 限差评估; 短波不平顺采用30 m弦 5 m点对检核, 限差按 2 mm 评估; 长波不平顺采用300 m弦, 150 m 点对检核, 限差按 10 mm评估; 轨距递变率按 2.5 m基线计算; 扭曲 (三角坑) 按3 m基线计算)																						
序号	轨枕编号*	里程 (m)	断链属性	偏差量 (mm) [实测-最优]						设计超高 (mm)	轨距邻点递变 (mm)	轨距递变率 [2.5 m, %]	扭曲 [3m, %]	导向轨	短波不平顺 (mm) [30m弦, 5m点对]				长波不平顺 (mm) [300m弦, 150m点对]			
				左轨向	右轨向	左高低	右高低	轨距	水平						左轨向	右轨向	左高低	右高低	左轨向	右轨向	左高低	右高低
199	199	SDK1+695.917	1	-1.2	-1.5	0.5	-0.3	-0.3	-0.8	0	-0.4	0.2	0.1	1	-1.6	-1.3	0.1	-0.4	3	3.8	-3	-1.7
200	200	SDK1+696.542	1	-0.3	-0.9	0.7	-0.3	-0.7	-1	0	0.2	0.3	0.1	1	-2.5	-1.8	-0.1	-0.5	1.9	3.1	-3.2	-1.6
201	201	SDK1+697.167	1	-0.5	-1	0.8	-0.1	-0.5	-0.9	0	0.4	0.1	0.1	1	-1.6	-1.2	-0.1	-0.7	2	3	-3.1	-1.7
202	202	SDK1+697.792	1	-1.5	-1.6	0.9	0	-0.1	-0.9	0	0.3	0	0.1	1	-0.1	-0.2	-0.1	-0.8	2.8	3.4	-3.1	-1.7
203	203	SDK1+698.417	1	-2.1	-1.9	1.1	0.1	0.2	-1	0	-0.1	-0.1	0.1	1	0.5	0.3	-0.6	-0.7	3.2	3.6	-3.1	-1.7
204	204	SDK1+699.042	1	-1.9	-1.8	1.1	0	0.1	-1.1	0	-0.4	0	0.1	1	-0.1	0	-1	-0.8	2.9	3.4	-3	-1.4
205	205	SDK1+699.667	1	-1.6	-1.9	0.8	-0.4	-0.3	-1.2	0	0.1	0.1	0.1	1	-0.5	0	-1	-0.5	2.4	3.3	-2.5	-0.9
206	206	SDK1+700.292	1	-2.2	-2.4	0.7	-0.6	-0.2	-1.3	0	0.2	0	0	1	0.4	0.5	-0.8	-0.3	2.9	3.7	-2.2	-0.5
207	207	SDK1+700.917	1	-2.8	-2.8	0.6	-0.7	0	-1.3	0	0	0	-0.1	1	1.6	1.2	-0.6	-0.1	3.3	3.9	-1.9	-0.2
208	208	SDK1+701.542	1	-2.8	-2.7	0.6	-0.8	0	-1.4	0	-0.1	0.1	-0.2	1	1.7	1.1	-0.7	-0.1	3.2	3.7	-1.7	0.1
209	209	SDK1+702.167	1	-2.1	-2.2	0.7	-0.8	-0.1	-1.5	0	-0.2	0.1	-0.2	1	0.7	0.4	-1.1	-0.4	2.3	3.1	-1.5	0.3
210	210	SDK1+702.792	1	-1.6	-1.8	0.8	-0.8	-0.3	-1.6	0	0.4	0	-0.3	1	0	-0.1	-1.2	-0.5	1.7	2.5	-1.4	0.5
211	211	SDK1+703.417	1	-1.6	-1.6	0.5	-0.6	0.1	-1.2	0	0.1	-0.2	-0.1	1	-0.1	-0.2	-1	-0.8	1.5	2.2	-0.7	0.7

图 5-7 InsRail 生成的轨道几何参数数据报表

表 5-3 InsRail 软件主要功能列表

功能模块	功能介绍
GNSS 解算	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ GNSS 动态差分后处理解算 (PPK)</li> <li>✓ 提供高精度 GNSS 定位、测速结果</li> <li>✓ 支持 GPS 和北斗系统</li> </ul>
A-INS 组合导航解算	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ A-INS 组合导航解算, 提供高精度位置、速度和姿态信息</li> <li>✓ 支持 GNSS、里程计、非完整性约束和零速修正等辅助信息</li> </ul>
轨道几何状态分析	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ 提供轨道中线和左右钢轨的三维坐标、轨道三维姿态、轨道里程和实测轨距</li> <li>✓ 计算轨道调整量, 包括: 左右钢轨轨向、高低调整量、水平、轨距偏差等各项参数</li> <li>✓ 分析轨道几何状态: (覆盖超短波至 300m 长波不平顺), 包括轨向不平顺、高低不平顺、三角坑和超高不平顺等各项轨道不平顺, 及轨距递变率等参数</li> <li>✓ 能够精确确定轨道变形发生的位置, 里程定位误差不大于 5 cm</li> <li>✓ 丰富的图形显示, 导出报表</li> </ul>

### 5.3.1 A-INS 松组合算法工程化

第 2 章对 A-INS 松组合算法进行了详细的描述, 给出了间接卡尔曼滤波的状态方程和观测方程, 具体实现时套用经典卡尔曼滤波的基本方程即可。A-INS 松组合卡尔曼滤波采用 21 维状态量, 里程计的比例因子误差并未增广到卡尔曼滤波状态量中, 因为考虑到并不是所有的测量场景中都有稳定可靠的 GNSS 位置修正, 因此里程计的比例因子误差在数据预处理过程中进行估计和补偿。InsRail 的松组合解算流程如图 5-8 所示, 主要包括三个部分: 1) 惯性导航解算, 包括初始对准和惯导机械编排; 2) A-INS 组合导航正向滤波解算; 3) A-INS 组合导航最优平滑解算。其中误差补偿和反馈修正说明如下:

(1) IMU 误差补偿: IMU 原始数据在进入惯导机械编排之前需对传感器误差进行补偿, 误差参数通过 A-INS 组合导航卡尔曼滤波或最优平滑算法在线估计得到, 具体的补偿公式可参考文献(Shin 2005, 张全 2015)。

(2) 反馈修正: 用 A-INS 卡尔曼滤波或最优平滑解算得到的导航状态误差对 INS 机械编排的导航结果进行反馈修正, 同时对 IMU 数据中的惯性器件误差进行反馈补偿。

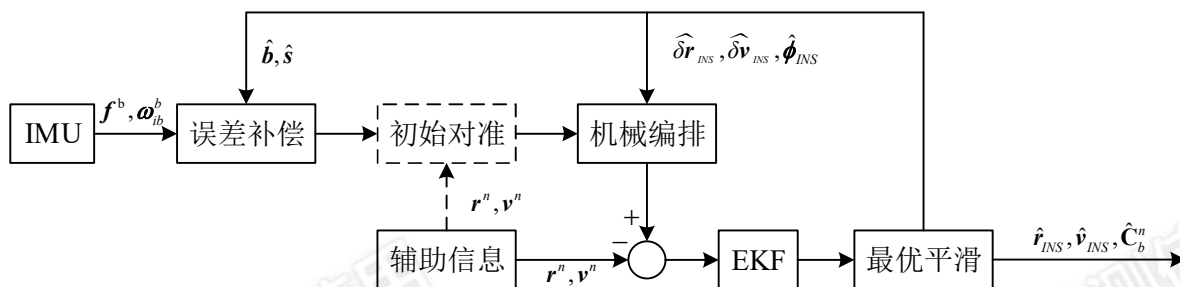


图 5-8 InsRail 松组合解算流程图

下面对 A-INS 组合导航解算中的一些关键点或技巧进行说明及讨论。

### 5.3.1.1 惯性导航初始化

惯导解算的初始化是指确定其初始位置、速度和姿态。初始位置和速度一般由外部测量手段提供（如 GNSS 或全站仪），也可根据轨道设计线型人为给定。导航级惯导的初始姿态可通过静态初始对准自动确定，主要有静态粗对准和精对准，具体可参考 (Titterton and Weston 2004, Britting 2010)。在没有条件进行长时间静态对准的情况下，可根据起点的里程和设计线型计算出相应的方位角、坡度角和横向倾斜角来对惯导的姿态进行初始化。虽然实际轨道的姿态角与设计值并不一致，但对于惯导的初始化来说已经足够精确（针对高铁轨道）。根据轨道设计线型计算中边桩的三维坐标、中线方位角、中线坡度角及设计超高的算法已经很成熟，在常规小车中应用已久，具体的算法实现可参考(李德光 2012)。InsRail 软件可以根据给定的起点里程自动计算惯导的初始姿态角。

### 5.3.1.2 使用非完整性约束的问题

从第 3 章的理论分析可以看出合理和充分使用非完整性约束对于提高 A-INS 轨检小车的测量精度能起到重要作用。具体使用非完整性约束辅助时应注意以下两个问题。

一方面，在某些极端情况下钢轨对 A-INS 轨检小车运动状态的非完整性约束并不总是成立的。例如轨检小车经过钢轨接缝或焊缝凸起时可能出现横向移动或垂向跳起，这样就破坏了非完整性约束的成立条件。在数据预处理时，可根据惯导的加速度和角速度信号判断出上述情况，并记录其发生的时刻，在 A-INS 组合导航解算时关闭该时刻的非完整性约束更新。

另一方面，需要精确估计或标定 IMU 的安装误差角。在理论分析中我们假设  $b$  系与  $v$  系重合或两个坐标系间的三个欧拉角精确已知。实际上  $b$  系与  $v$  系的轴系间总是存在一定的夹角（称作 IMU 的安装误差角）。如果不准确估计和补偿 IMU 安装误差角，则  $C_b^v$  的误差会带来速度在  $v$  系下的投影误差，从而破坏观测方程(2.123)，此时非完整性约束不但对位置、姿态精度没有帮助，反而可能会损害 A-INS 的导航精度。当噪声  $n_{vw}$  设定越小，安装误差角所造成的影响就越大。下面给出安装误差角的实验室标定方法和实用的现场标定方法。

**实验室标定：**实验室标定需要特殊的检校台，检校台上安装两根平行的钢轨，将两根钢轨调整至同一水平面上，精确测定钢轨的方位角。将轨检小车放置在钢轨上，保证横垂方向的密贴（此时小车车架的横滚角和俯仰角为 0），静止测量约 15 分钟；解算惯导数据得到 IMU 的横滚角、俯仰角和航向角。稳定之后的横滚角和俯仰角均值即为对应的安装误差角，IMU 航向测量值与钢轨航向之差的均值为航向安装误差角。这种实验室标定方法能够得到较高的标定精度，其误差不大于惯导的姿态角误差。

**现场标定法：**选取一段精调好的新建轨道或者几何状态良好的既有线轨道，A-INS 轨检小车对该轨道进行动态测量，得到不同里程点上的姿态角测量值。同时根据轨道设计线型可计算出轨道的设计姿态角（即方位角，坡度角和横向倾斜角）作为参考值。A-INS 轨检小车的姿态角测量值与参考值求差，则得到的差值序列应该是一个均值不为零的平稳误差序列，姿态角误差序列的均值即可认为是安装误差角估值。该方法的原理与实验室标定一致，但是现场标定可以让轨检小车做不同的机动运动（如第 4 章所述），使得航向角充分收敛，以提高标定精度。现场还可通过对比轨检小车的正反两次测量结果（摆放方位调转 180 度）来消除系统性测量误差。由于轨道超高/水平的限差不大于 2 mm，要求测量值至少要达到 0.3 mm 的精度，因此横滚角的标定误差不应大于 0.01 deg。

### 5.3.2 轨道几何参数的计算

A-INS 组合导航系统提供了精确的三维位置坐标和姿态，据此可以通过投影计算钢轨的位置坐标。然后，拟合得到轨道的偏差量，计算轨道不平顺等轨道几何参数。下面重点介绍轨道偏差量的计算方法，在这之前需要进行数据的里程同步和空间降采样处理。

#### 5.3.2.1 里程同步

A-INS 组合导航一般给出的是全球坐标系下的大地坐标，而轨道控制网采用当地独立水平坐标系。首先需要对 A-INS 轨检小车的坐标序列进行坐标系转换：1) 如果已知两个坐标系统之间的转换参数，则可直接将大地坐标转换为轨道所在坐标系下的平面坐标和高程；2) 如果转换参数未知，或者只需计算轨道不平顺而无需提供精确的绝对坐标时，可采用高斯投影的方法将大地坐标转换成平面坐标和高程。实际常采用膨胀椭圆高斯投影变换得到平面坐标和高程，并有效地控制投影变形。

根据平面坐标可以计算出测量点对应的轨道里程，方法如下：1) 如果 A-INS 的测量坐标已转换到轨道控制网所用坐标系，则可根据坐标直接反算出轨道里程(李德光 2012)。2) 根据平面坐标可以计算出测量点之间的里程间距，在给定起始点里程的情况下，可以推算出任意测量点的绝对里程。根据 5.2.3 节描述的时间同步方案，各传感器可以通过统一的时间信息来查找相应的绝对里程，完成里程同步。

### 5.3.2.2 空间降采样

A-INS 轨检小车的测量传感器按不同的采样率进行数据采集, 如表 5-2 所示, 这样就无法保证各传感器在相同的里程点上进行采样。而且高采样率的传感器, 如 IMU 和轨距尺, 会产生大量的冗余测量信息。例如轨检小车以 5 m/s 的速度运行测量, A-INS 组合导航系统 (200 Hz 采样) 提供的测量坐标序列的里程间距为 2.5 cm。实际的无砟轨道精调作业只需要轨枕对应里程的测量值即可。因此, 里程同步之后应该对 A-INS 解算结果、轨距测量值按统一的里程序列进行重采样, 例如只在轨枕对应的里程点进行重采样。

轨距的重采样比较简单, 可采用线性或三次样条曲线的方式内插得到采样里程点上的轨距值, 是一种单维度的内插。A-INS 平面坐标序列的重采样则稍微复杂一些, InsRail 软件采用“滑动窗口拟合法”对平面位置坐标和高程进行重采样: 以采样点里程为中点设置拟合窗口 (窗口长度一般设置为 0.625 m), 对窗口内的位置坐标测量值进行拟合, 然后根据拟合参数计算采样点里程处的拟合值, 作为最终的坐标重采样值; 其中拟合的方法可采用整体最小二乘法或三次样条曲线拟合法。

InsRail 软件对重采样后的轨道中线平面坐标和高程分别进行拟合得到中线的最优平曲线和竖曲线; 然后计算左右钢轨实测坐标到拟合中线的实测横垂投影距离; 实测投影距离与设计距离之差 (需要考虑设计轨距和超高) 作为轨道的偏差量; 其中横向偏差又称作轨向偏差, 高程偏差称作高低偏差, 具体的符号定义参考规范(CN-TB 2012)。

轨道在水平方向分为直线、缓和曲线和圆曲线三种线型, 高程方向分为直线和圆曲线两种。最优曲线拟合的原则为实测点到拟合曲线的几何距离平方和最小。下面介绍直线、圆曲线和缓和曲线的整体最小二乘拟合法。

### 5.3.2.3 直线拟合

直线是铁路轨道中最简单的线形, 假设直线方程为:

$$y_i = kx_i + b \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (5.4)$$

式中,  $(x_i, y_i)$  为直线段轨道实测坐标,  $k$  为直线斜率,  $b$  为直线截距。则任意实测点  $(x_i, y_i)$  到拟合直线的距离的平方为:

$$d_i^2 = \frac{(kx_i - y_i + b)^2}{k^2 + 1} \quad (5.5)$$

其中  $k$ ,  $b$  为待估参数; 假设  $k_0$ ,  $b_0$  分别为二者的近似值, 则有

$$\begin{cases} k = k_0 + \delta k \\ b = b_0 + \delta b \end{cases} \quad (5.6)$$

将等式(5.6)代入等式(5.5), 展开并忽略二阶小项, 整理得(陈海军 2013, 旷俭 2016):

$$\delta d_i^2 = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{2x_i(k_0x_i - y_i + b_0)}{k_0^2 + 1} - \frac{2k_0(k_0x_i - y_i + b_0)^2}{(k_0^2 + 1)^2} & \frac{2(k_0x_i - y_i + b_0)}{k_0^2 + 1} & \\ & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta k \\ \delta b \end{bmatrix} + \frac{(k_0x_i - y_i + b_0)^2}{k_0^2 + 1} \quad (5.7)$$

根据式(5.7), 将所有实测点写成矩阵形式为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\delta\mathbf{x} - \mathbf{l} \quad (5.8)$$

式中,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \dots \\ \delta d_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -\frac{(k_0x_i - y_i + b_0)^2}{k_0^2 + 1} \\ \dots \\ -\frac{(k_0x_n - y_n + b_0)^2}{k_0^2 + 1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2x_i(k_0x_i - y_i + b_0)}{k_0^2 + 1} - \frac{2k_0(k_0x_i - y_i + b_0)^2}{(k_0^2 + 1)^2} & \frac{2(k_0x_i - y_i + b_0)}{k_0^2 + 1} \\ \dots & \dots \\ \frac{2x_n(k_0x_n - y_n + b_0)}{k_0^2 + 1} - \frac{2k_0(k_0x_n - y_n + b_0)^2}{(k_0^2 + 1)^2} & \frac{2(k_0x_n - y_n + b_0)}{k_0^2 + 1} \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta k \\ \delta b \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

基于整体最小二乘基本原则  $\sum_{i=1}^n d_i^2 = \min$ , 使用最小二乘计算方法, 求解未知参数的修正值为:

$$\delta\mathbf{x} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{l}) \quad (5.11)$$

将式(5.11)代入式(5.6)得到直线方程的斜率和截距最优解, 最终得到调整量最小的实测轨道直线线形。

### 5.3.2.4 圆曲线拟合

圆曲线方程为:

$$(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2 = R^2 \quad (5.12)$$

式中,  $(x_i, y_i)$  轨道圆曲线实测点,  $(X, Y)$  圆心坐标,  $R$  为圆曲线半径。则任意实测点  $(x_i, y_i)$  到拟合圆曲线的距离为:

$$d_i = \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} - R \quad (5.13)$$

其中, 圆心坐标  $(X, Y)$  和圆半径  $R$  都是未知数, 假设它们的近似值为:  $X_0, Y_0, R_0$ , 则有:



$$\begin{cases} X = X_0 + \delta X \\ Y = Y_0 + \delta Y \\ R = R_0 + \delta R \end{cases} \quad (5.14)$$

对式(5.13)进行泰勒级数展开,并忽略高阶项,整理得到(陈海军 2013, 旷俭 2016):

$$\delta d_i = \left[ -\frac{x_i - X_0}{\sqrt{(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2}} \quad -\frac{y_i - Y_0}{\sqrt{(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2}} \quad -1 \right] \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta R \end{bmatrix} - \left( -\sqrt{(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2} + R_0 \right) \quad (5.15)$$

根据式(5.15),将所有实测点写成矩阵形式为:

$$V = B\delta x - l \quad (5.16)$$

其中,

$$V = \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \dots \\ \delta d_n \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} -\sqrt{(x_1 - X_0)^2 + (y_1 - Y_0)^2} + R_0 \\ \dots \\ -\sqrt{(x_n - X_0)^2 + (y_n - Y_0)^2} + R_0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 - X_0}{\sqrt{(x_1 - X_0)^2 + (y_1 - Y_0)^2}} & -\frac{y_1 - Y_0}{\sqrt{(x_1 - X_0)^2 + (y_1 - Y_0)^2}} & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{x_n - X_0}{\sqrt{(x_n - X_0)^2 + (y_n - Y_0)^2}} & -\frac{y_n - Y_0}{\sqrt{(x_n - X_0)^2 + (y_n - Y_0)^2}} & -1 \end{bmatrix} \quad \delta x = \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta R \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

基于整体最小二乘基本原则  $\sum_{i=1}^n d_i^2 = \min$ , 使用最小二乘计算方法,求解未知参数的修正值为:

$$\delta x = (B^T B)^{-1} (B^T l) \quad (5.19)$$

将(5.19)带入(5.14)得到圆曲线中心坐标和半径的最优解。

### 5.3.2.5 缓和曲线拟合

我国铁路采用的缓和曲线为回旋曲线,其基本特性为曲线上任意一点的曲率半径与该点至起点的曲线长成反比。缓和曲线上任意一点坐标可表示为(旷俭 2016):

$$\begin{cases} x_i \approx l_i - \frac{l_i^5}{40R^2 l_0^2} + \frac{l_i^9}{3456R^4 l_0^4} \\ y_i \approx \frac{l_i^3}{6R l_0} - \frac{l_i^7}{336R^3 l_0^3} + \frac{l_i^{11}}{42240R^5 l_0^5} \end{cases} \quad (5.20)$$

式中,  $(x_i, y_i)$  为缓和曲线上的点坐标 (以缓和曲线起点为坐标原点, 起点处切线向右为  $x$  轴正向, 垂直于切线方向指向曲线内侧为  $y$  轴正向),  $l_i$  为计算点到缓和曲线的起

点的距离， $l_0$  缓和曲线总长度， $R$  为与缓和曲线相连接的圆曲线半径。需要特别强调的是，此处没有考虑非对称型缓和曲线的情形，但这在高铁线路中也非常罕见。

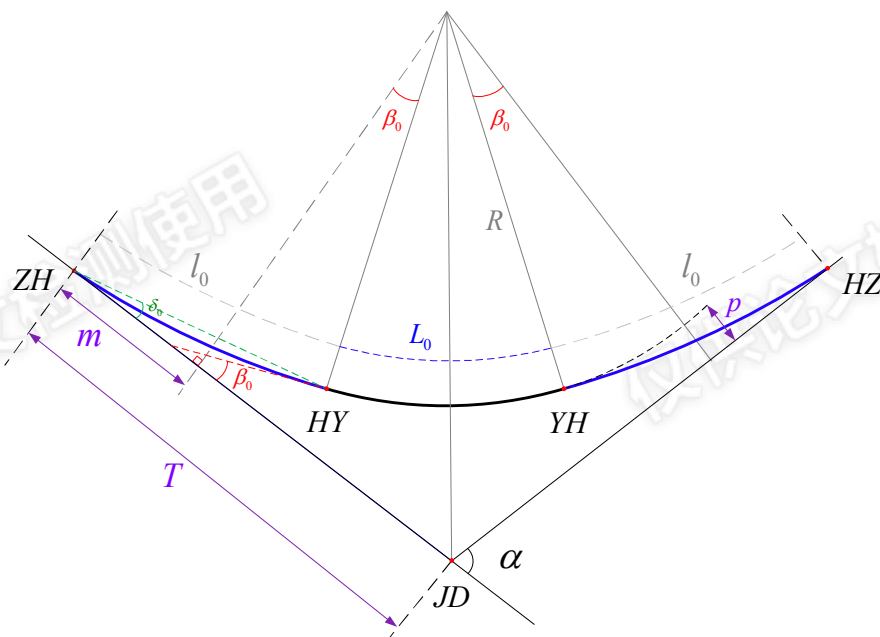


图 5-9 对称型缓和曲线

图 5-9 为对称型缓和曲线示意图，图中的圆曲线内移量  $p$  和切垂距  $m$  的计算公式为：

$$\begin{cases} p = \frac{l_0^2}{24R} - \frac{l_0^4}{2688R^3} \\ m \approx \frac{l_0}{2} - \frac{l_0^3}{240R^2} \end{cases} \quad (5.21)$$

缓和曲线的实际长度与理论设计值并不一定完全相等。根据与缓和曲线相接的直线和圆曲线拟合参数，可以计算出实际的圆曲线内移量：

$$p_c = \sqrt{(x_c - x_f)^2 + (y_c - y_f)^2} - R_c \quad (5.22)$$

式中， $(x_c, y_c)$  为拟合的圆曲线圆心坐标， $R_c$  为圆曲线的拟合半径， $(x_f, y_f)$  为经过圆曲线中心且与直缓点切线垂直的直线在直缓点切线的垂足的坐标。将内移量计算值  $p_c$  代入式(5.21)，计算出缓和曲线的实际长度。再将实际缓和曲线长度值代入式(5.20)，就可以求解得到实际缓和曲线的最优曲线（拟合曲线）。缓和曲线实测坐标向拟合曲线投影得到缓和曲线的轨向偏差量。

缓和曲线的拟合也可借鉴动检车的方法：缓和曲线的方位角与里程成抛物线关系，应用最小二乘法拟合“里程-方位角”计算抛物线参数，得到最优缓和曲线，然后计算实测点到拟合缓和曲线的距离即得到缓和曲线上的轨向偏差量(Glaus 2006, 韩云飞 2012)。

缓和曲线上任意一点的局部坐标可按下式转换为线路绝对坐标(旷俭 2016)：

$$\begin{cases} X_i = X_{ZH} + x_i \cos(A) - y_i \sin(A) \\ Y_i = Y_{ZH} + y_i \cos(A) + x_i \sin(A) \end{cases} \quad (5.23)$$

式中,  $(X_{ZH}, Y_{ZH})$  为缓和曲线起始点 (直缓点) 的绝对坐标,  $A$  为缓和曲线在绝对坐标系中的起始方位角,  $(x_i, y_i)$  为缓和曲线上的点在缓和曲线局部坐标系的坐标。

### 5.3.2.6 分段拟合

A-INS 组合导航的绝对位置精度很大程度上取决于绝对定位手段; GNSS/INS 组合导航的位置在大尺度上“跟随”GNSS。例如对于 1000 m 的直线轨道, 如果直接进行拟合的话, 拟合残差的幅度可能比实际轨道偏差量要大。虽然拟合残差序列之间仍然存在较强的相关性, 但如此得到的轨道调整量将与实际情况不符。为解决这一问题, 本文对同一轨道线型的测量值采用“滑动窗口”的方法进行分段拟合, 窗口之间有重叠。分段拟合所造成的相邻“窗口”重叠里程段拟合残差不一致的问题, 可采用类似于常规静态小车的“测段搭接”方法来处理。

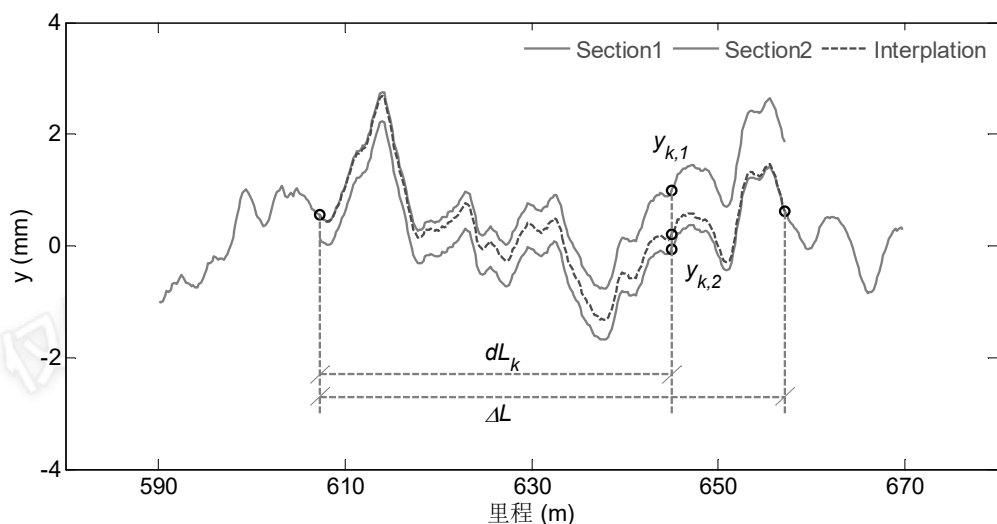


图 5-10 重叠段拟合残差的搭接处理

如图 5-10 所示, 通过对两次拟合的偏差量按距离加权来计算重叠段的偏差量。重叠段的长度为  $\Delta L$ ,  $dL_k$  表示里程点  $L_k$  到重叠段起点的里程距离。重叠段的加权处理有多种方法, 例如按距离进行线性加权, 按距离进行正弦函数加权等。以线性加权处理为例, 重叠段里程点  $L_k$  处的偏差量按下式计算:

$$\hat{y}_k = \left(1 - \frac{dL_k}{\Delta L}\right) y_{k,1} + \frac{dL_k}{\Delta L} y_{k,2} \quad (5.24)$$

这里需要特别强调的是: 分段拟合不会对短波不平顺造成显著的影响, 但是分段拟合的窗口长度也不得小于长波不平顺的基线长度 (即 300 m), 否则得到的轨道偏差量会偏于乐观, 尤其是当被测轨道存在大变形量时。

## 5.4 整体性能测试与分析

下面将通过实际轨道测量实验来测试和评估 A-INS 轨检小车原型系统的整体性能和主要精度指标；验证 A-INS 轨检小车系统设计的可行性及算法的有效性，并对第 3 章误差理论模型的部分指标进行验证。

### 5.4.1 实验描述

#### 5.4.1.1 测试轨道

A-INS 轨检小车整体性能评估实验于 2013 年 11 月在兰新铁路第二双线“吐鲁番-鄯善”区段的新建线路上开展。兰新高铁是一条东起兰州，途经西宁，西至乌鲁木齐的高速铁路，全长 1776 公里，设计时速 250 公里。兰新高铁采用双块式无砟轨道，实验时轨道处于第一次长轨精调阶段。测试路段为左线 DK1653+126~DK1654+124（长约 1 公里），设计坡度为 2.9% 的直线轨道，无竖曲线；中线设计方位角约  $273^\circ$ ，接近东西走向。测段位于戈壁滩上，GNSS 信号全程无遮挡，具有良好的观测条件。



图 5-11 A-INS 轨检小车及水准测量作业图；水准尺放置在每根轨枕对应的钢轨轨顶面处测量对应的左右钢轨的轨面高程

#### 5.4.1.2 实验设备及数据采集

实验所用的主要设备为 A-INS 轨检小车原型系统，如图 5-11 所示，其主要传感器如 5.2 节所描述。该系统的核心硬件包括：轻型轨检小车车体、高精度组合导航系统 LINS812、轨距尺及里程计等。其中 LINS812 与武汉迈普时空的 MP-POS830 所用的惯性传感器为同一型号，性能参数一致。GNSS 基站架设在轨道附近的 CPII 控制点上进行同步观测。实验中对该段轨道进行了三次独立的重复测量，测量人员以步行的速度推动轨检小车进行动态测量，数据记录在小车的数据采集系统中。

### 5.4.1.3 参考系统

实验中使用高精度电子水准仪和基于全站仪的静态轨检小车对该段轨道进行了测量，作为参考系统来评估 A-INS 轨检小车的外符合精度。

#### (1) 水准测量提供高程参考值

Trimble Dini03 高精度数字水准仪配合铟钢精密条码水准尺的标称精度为每公里往返中误差为 0.3 mm。测量过程如下：水准尺分别放置在每根轨枕对应的左右钢轨轨顶面上进行测量，得到对应的轨面高程测量值，最终形成一个闭合的水准线路，平差得到的轨道相对高程数据，如图 5-11 所示。每根轨枕对应的里程已通过常规小车测量得到，为每个水准测量值赋予了里程信息。水准高程测量值可用作 A-INS 轨检小车高低分量的“高精度”参考。受现场测量时间窗口的限制，水准只测了 DK1653+127~DK1653+757 约 630 m。

#### (2) 全站仪静态小车提供轨向参考

采用 Amberg GRP1000 静态轨检小车对被测轨道进行了测量，用于提供轨向和轨距等参考。如第 1 章介绍，Amberg GRP1000 是以高精度自动测量型全站仪 Leica TCA2003 为核心测量设备的静态轨检小车。测量过程中全站仪架设在轨道中线上，在 CPIII 控制网下自由设站，采用“走走停停 (stop-and-go)”的作业方式，在每根轨枕对应处进行静态测量。Amberg GRP1000 在平面位置和轨面高程方向上可达到 1mm 的相对测量精度，其水平位置坐标测量值被用作 A-INS 轨检小车的轨向参考。

## 5.4.2 内符合精度分析

A-INS 轨检小车的测量数据采用自主开发的 InsRail 软件进行处理，得到对应的轨道偏差量及轨道不平顺等各项轨道几何参数。其中 A-INS 组合导航采用正向滤波处理模式进行处理。下面首先分析 A-INS 轨检小车对同一段轨道多次测量结果之间的重复性，即评估内符合精度，主要是轨向、高低方向上的轨道偏差量和轨道不平顺。除非特别声明，后续轨向和高低偏差量及轨道不平顺只给出参考轨（左股钢轨）的测量结果，因为非参考轨的轨向和高低可以根据参考轨测量值和轨距、水平推算得到，精度一致。文中的轨道偏差量是指轨道的变形量，而不是指测量误差。

### 5.4.2.1 轨道偏差量内符合精度

图 5-12~图 5-15 分别给出了轨道的轨向偏差、高低偏差、超高偏差和轨距偏差测量值。每幅图中的第一个子图 (a) 为 A-INS 轨检小车对该项参数的实测值，第二子图 (b) 则为 A-INS 轨检小车第 2,3 次测量值与第一次测量值之间的差异，用于评估 A-INS 轨检小车对该项轨道参数的重复测量精度。对比图 5-12 和图 5-13 可以看出轨向偏差的幅度整体大于高低偏差，这可能是浇筑轨道板过程中高程控制桩的精度优于轨向控制

桩精度所致。从图中可以看出轨道横垂偏差的重复测量误差整体小于 0.2 mm，极少量里程点的重复测量误差接近 0.4 mm，但即便如此也远小于高铁轨道测量的容许误差。轨道超高和轨距的重复测量误差总体不大于 0.2 mm，DK1653+620 里程点附近的轨距重复性略差是因为该里程点轨道内侧的钢轨焊接头尚未打磨到位。

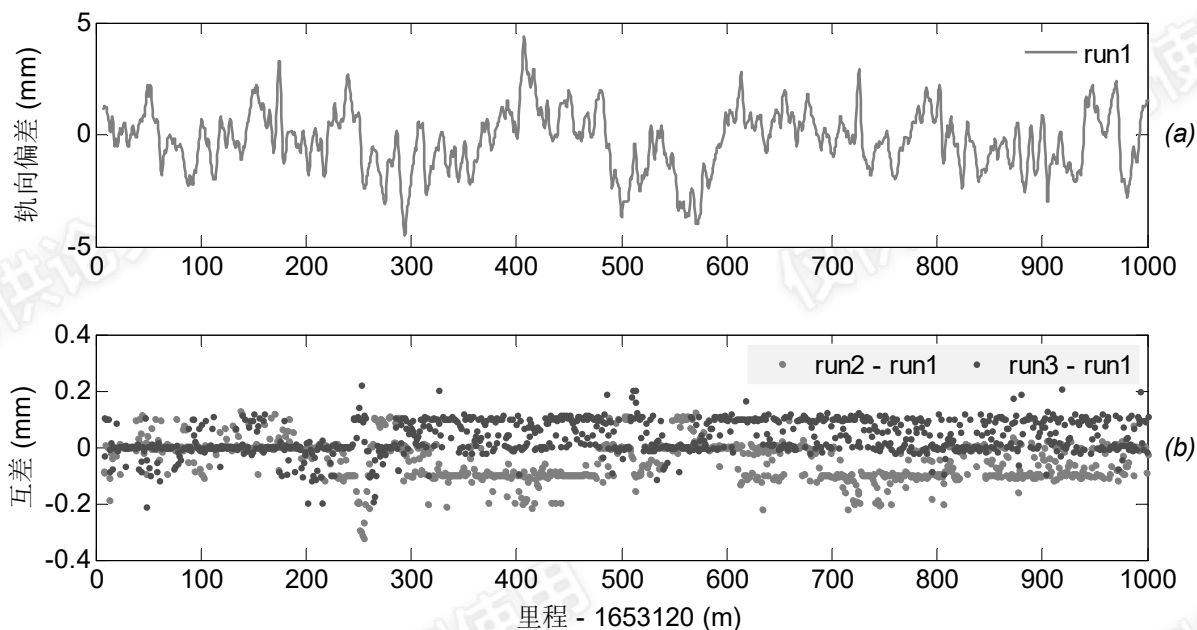


图 5-12 轨向偏差测量值；(a)为第一次测量的轨向偏差曲线；(b)为第二次和第三次轨向偏差测量值与第一次测量值之差

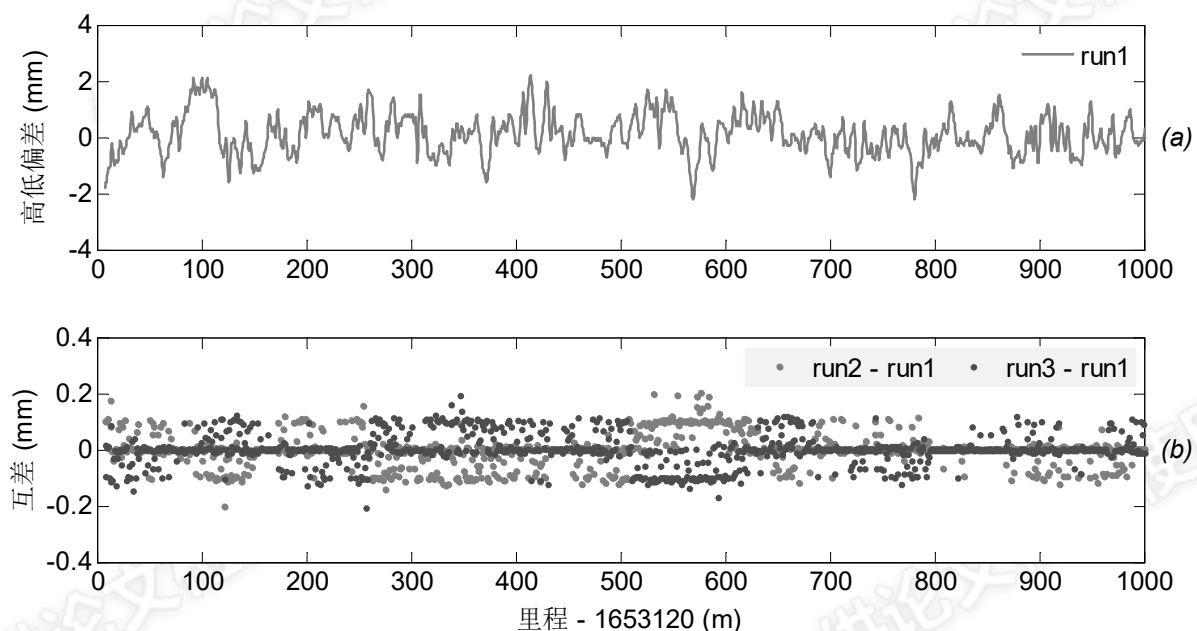


图 5-13 高低偏差测量值；(a)为第一次测量的高低偏差曲线；(b)为第二次和第三次的高低偏差测量值与第一次测量值之差

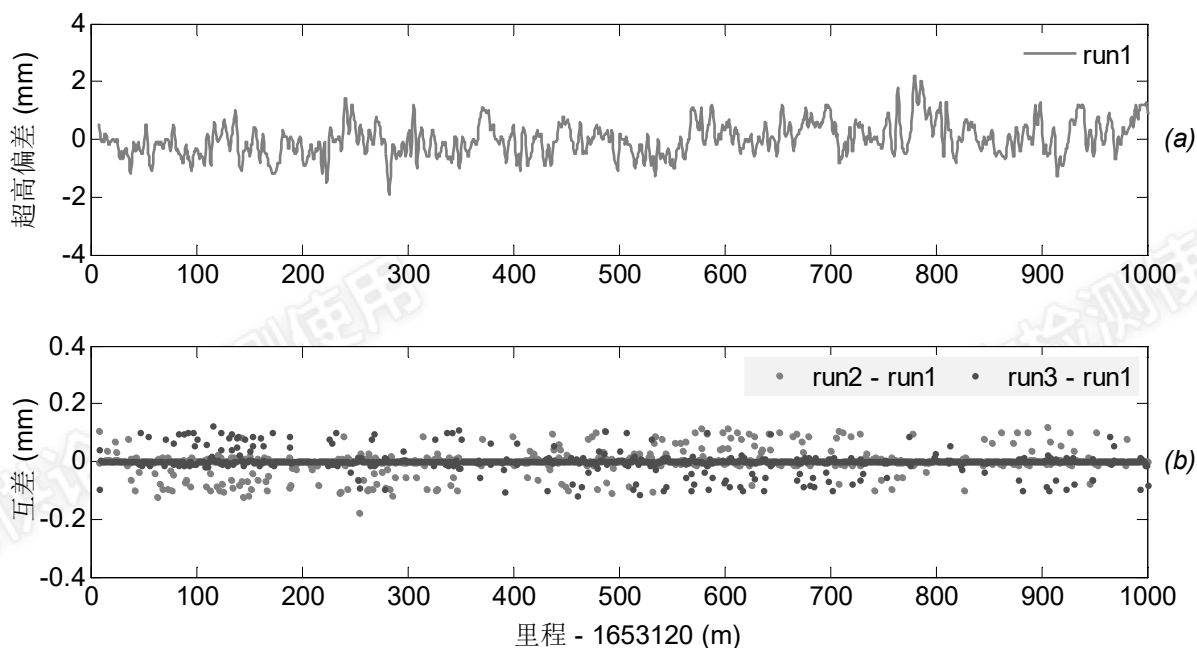


图 5-14 轨道超高偏差/水平测量值；(a)为第一次测量的超高偏差曲线；(b)为第二次和第三次的超高偏差测量值与第一次测量值之差

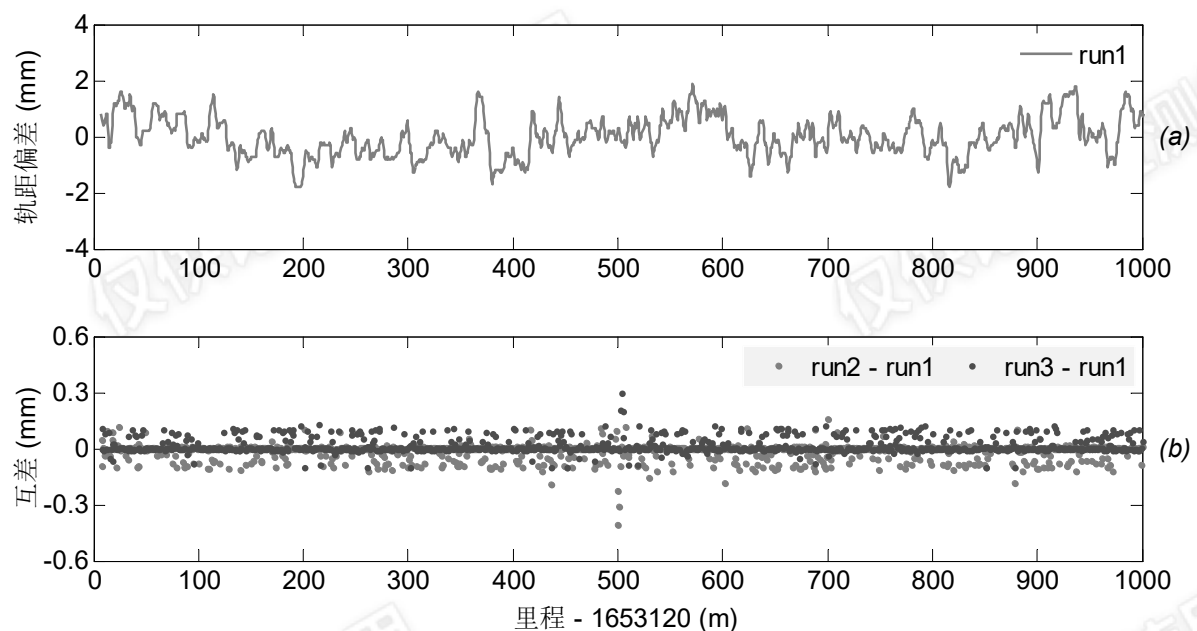


图 5-15 轨道轨距偏差测量值；(a)为第一次测量的轨距偏差曲线；(b)为第二次和第三次的轨距偏差测量值与第一次测量值之差

#### 5.4.2.2 轨道不平顺内符合精度

图 5-16~图 5-19 为长短波轨向、高低不平顺曲线。可以看出 A-INS 轨检小车的轨向不平顺重复测量误差整体不大于 0.2 mm，极少量里程点的差异接近 0.4 mm，但即便如此，仍小于 1/5 的限差 (2 mm)，高低不平顺的测量误差也大抵如此，见图 5-17。这说明 A-INS 轨检小车对短波不平顺的测量具备了足够的分辨率。从图 5-16 可以看出，

实际的短波轨向不平顺仍有不少超限点（不平顺幅度大于限差，2 mm），这是因为轨道刚进行第一次精调，残余的轨向偏差仍需进一步调整；而短波高低不平顺则已得到了有效的控制，这与图 5-12 和图 5-13 所示的结果一致。

从图 5-18 和图 5-19 可以看出，轨道不存在长波不平顺超限点，说明用常规轨检小车在 CPIII 控制网下对钢轨进行放样，可以很好地控制轨道长波不平顺。而 A-INS 轨检小车的长波不平顺的重复测量误差仍远小于长波不平顺测量的限差（10 mm），完全具备了长波不平顺测量所需的分辨率。

综上，A-INS 轨检小车对轨道偏差量和轨道不平顺的重复测量误差均远小于对应的限差值，能够达到轨道几何状态测量的精度分辨率要求。

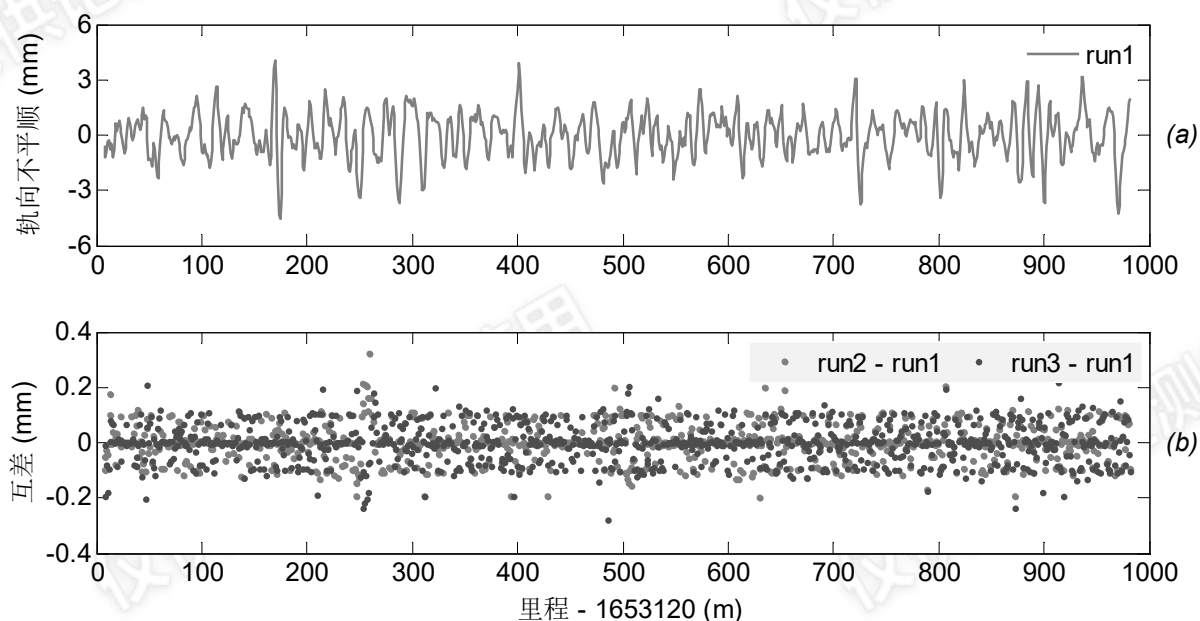


图 5-16 短波轨向不平顺（30 m 弦，5 m 检核点对）测量值；(a) 为第 1 次测量的短波轨向不平顺曲线；(b) 为第 2,3 次测量值与第 1 次测量值之差



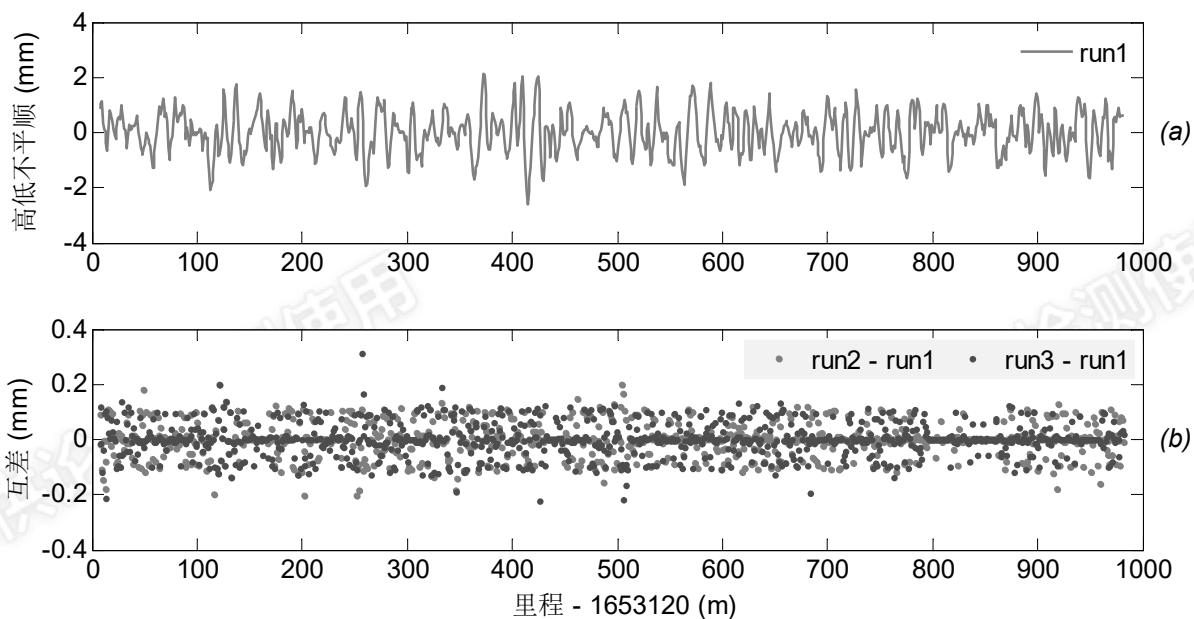


图 5-17 短波高低不平顺 (30 m 弦, 5 m 检核点对) 测量值; (a) 为第 1 次测量的短波高低不平顺曲线; (b) 为第 2,3 次测量值与第 1 次测量值之差

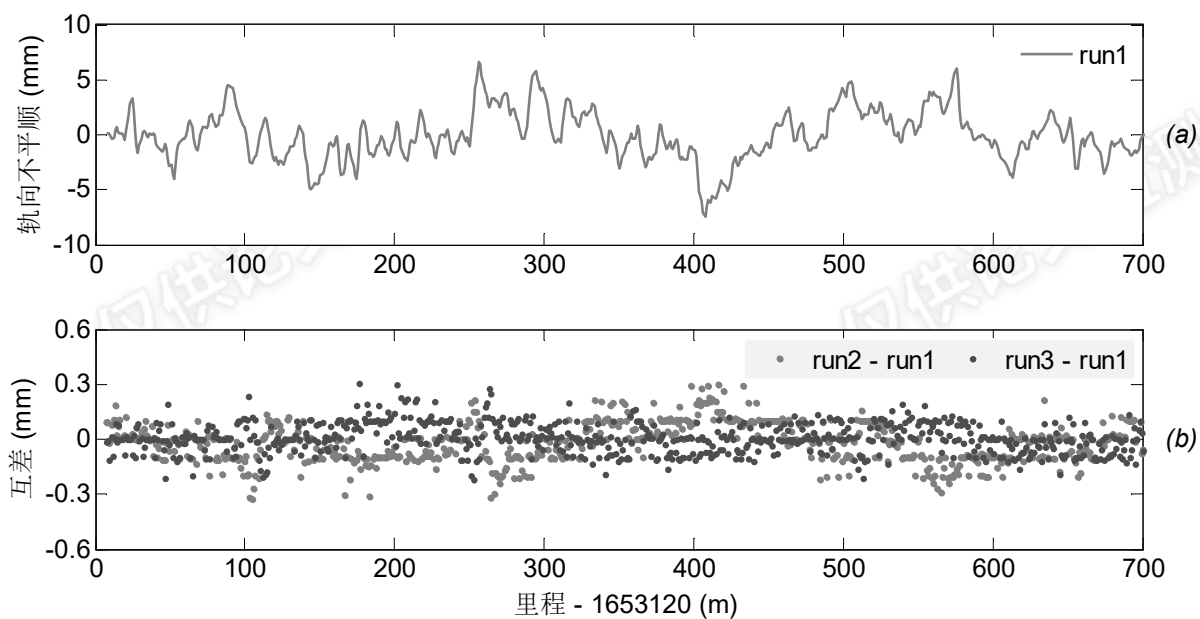


图 5-18 长波轨向不平顺 (300 m 弦, 150 m 检核点对) 测量值; (a) 为第 1 次测量的长波轨向不平顺曲线; (b) 为第 2,3 次测量值与第 1 次测量值之差

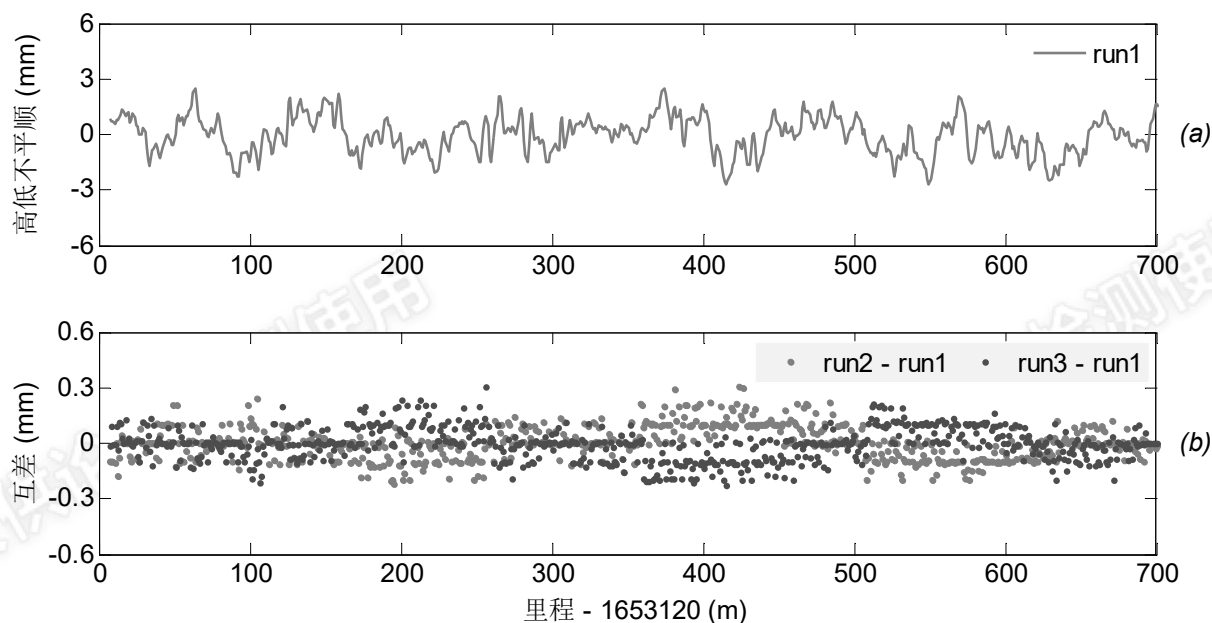


图 5-19 长波高低不平顺 (300 m 弦, 150 m 检核点对) 测量值; (a) 为第 1 次测量的长波高低不平顺曲线; (b) 为第 2,3 次测量值与第 1 次测量值之差

### 5.4.3 外符合精度分析

下面将 A-INS 轨检小车的测量结果与参考系统进行对比, 来进一步评估其实际测量精度, 论证轨检小车方案的有效性和可行性。一方面, 水准测量得到了离散的轨面高程值序列, 结合轨道的设计参数可以计算出轨道的高低偏差和高低不平顺。另一方面, 根据常规轨检小车的实测三维坐标和轨道的设计参数, 可以计算出轨道的轨向偏差量和轨向不平顺。除非特殊说明, 后续提到的短波不平顺均按 30 m 弦, 5 m 检核点对的差分正矢计算, 长波不平顺则按 300 m 弦, 150 m 检核点对计算, 如 2.2.2 所述。

#### 5.4.3.1 轨道偏差量测量精度评估

图 5-20 给出了 A-INS 轨检小车和参考系统的实测轨道偏差量, 可以看出 A-INS 轨检小车与参考系统的测量结果整体一致性很好, 二者的差异统计如图 5-21 所示。高低偏差量的差异整体不大于 1 mm, 如图 5-21 (b)所示。轨向偏差量的差异整体略大于高低方向, 部分里程点的轨向偏差差异接近 2 mm, 这是因为全站仪轨检小车自身也只有 1 mm 的位置测量精度, 如图 5-22 所示。图 5-22 对比了常规静态轨检小车与水准得到的高低偏差测量值, 可以看出二者的差异也在 1 mm 范围内波动; 而且差异曲线表现出了明显的 60 m 左右的周期性, 这可能是全站仪换站所带来的系统性偏差。

综上, 考虑到参考系统自身的误差, 可以认为 A-INS 轨检小车的高低偏差测量精度优于 1 mm; 轨向偏差量测量精度优于 1.5 mm, 与常规轨检小车精度一致。

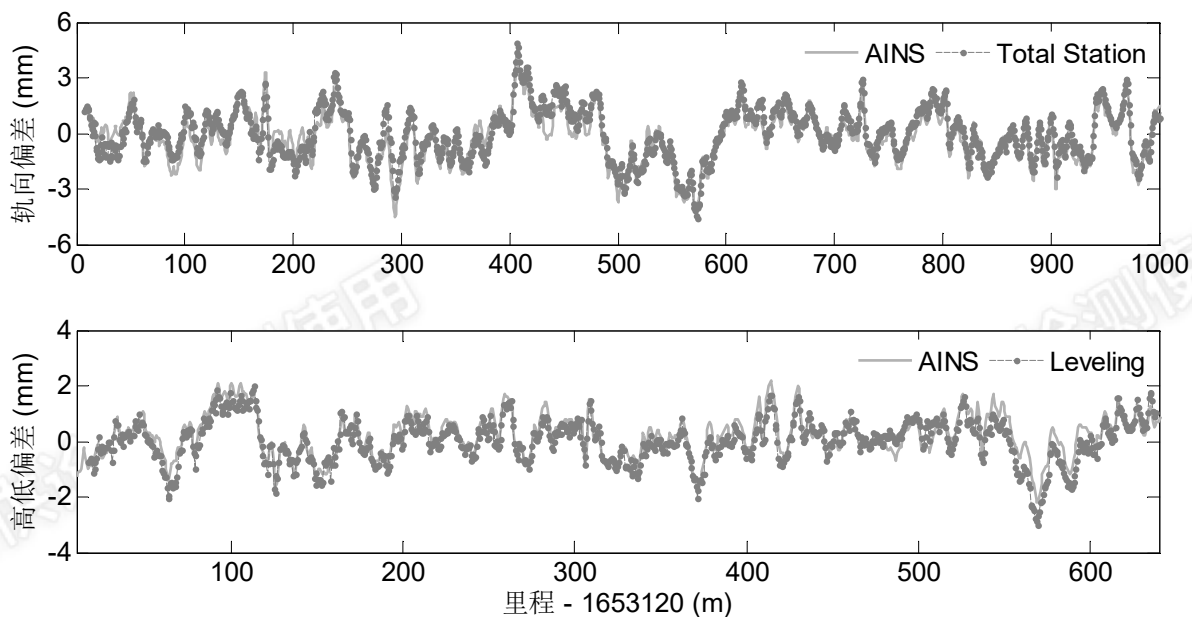


图 5-20 A-INS 轨检小车的实测轨道偏差量与参考系统对比

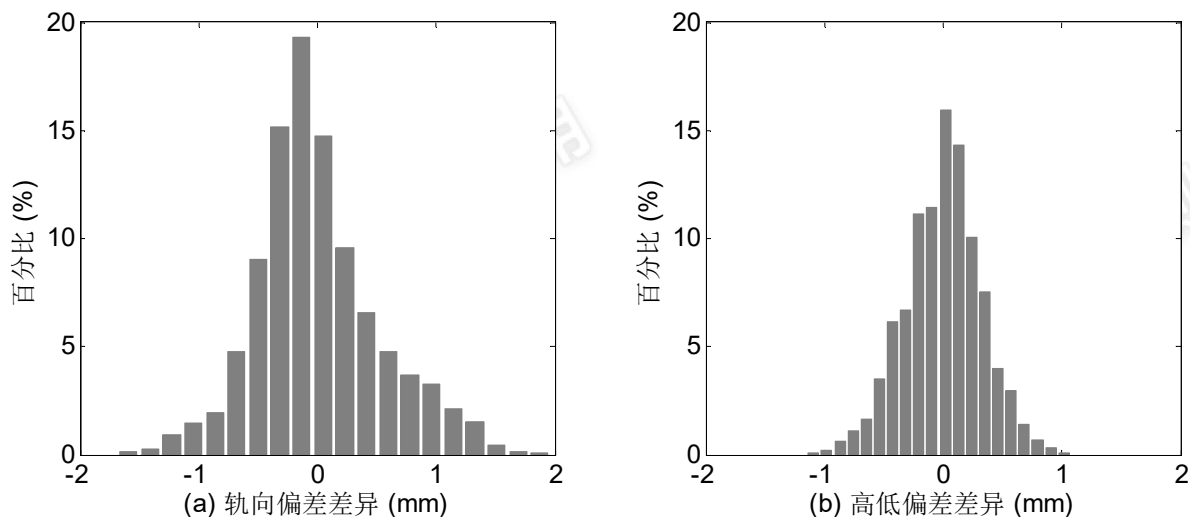


图 5-21 A-INS 轨检小车实测轨道偏差量与参考系统实测轨道偏差量差异分布统计; (a) 轨向差异的标准差为 0.52 mm ( $1\sigma$ ); (b) 高低差异的标准差为 0.32 mm ( $1\sigma$ )

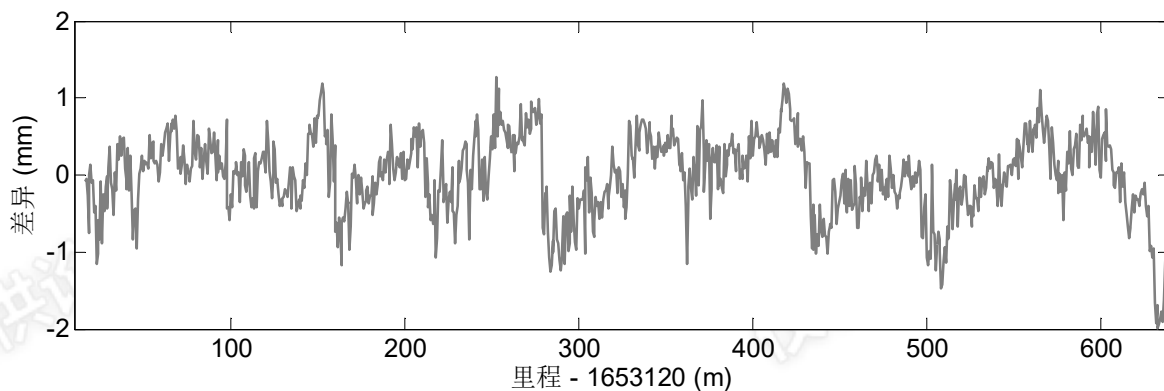


图 5-22 常规静态轨检小车的高低偏差量测量值与水准测量结果的差异

### 5.4.3.2 轨道不平顺测量精度评估

图 5-23 对比了 A-INS 轨检小车与参考系统的短波轨道不平顺测量值，可以看出二者的测量结果整体一致，差异如图 5-24 所示。短波高低不平顺与参考值之间的差异不大于 1 mm，如图 5-24 (b) 所示。轨向不平顺则以常规静态小车测量值为参考，A-INS 轨检小车的测量值与参考值之间的一致性很好，但极少量里程点的差异接近 2 mm。

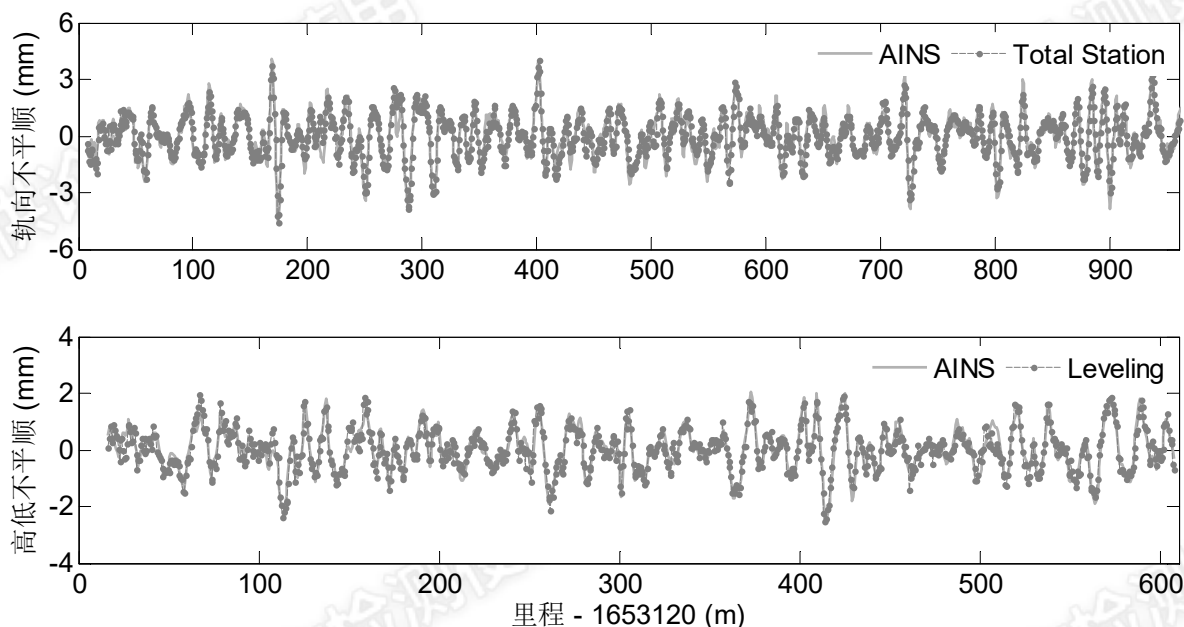


图 5-23 A-INS 轨检小车的实测短波不平顺与参考系统对比

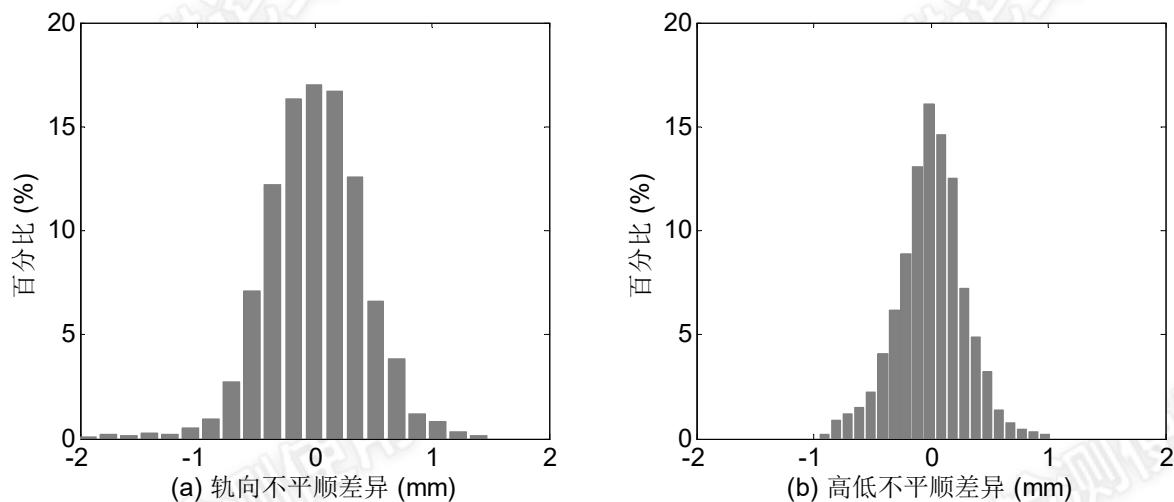


图 5-24 A-INS 轨检小车实测短波不平顺与参考系统实测短波不平顺差异的分布统计；轨向差异的标准差为 0.41 mm ( $1\sigma$ )；高低差异的标准差为 0.29 mm ( $1\sigma$ )

通过上述对比，同时考虑水准仪和常规静态轨检小车自身的测量误差，可以归纳如下：A-INS 轨检小车的短波高低不平顺测量精度优于 0.9 mm ( $3\sigma$ )。短波轨向不平顺的测量精度优于 1 mm ( $3\sigma$ )，与常规静态轨检小车精度相当。可见短波轨向、高低不平顺的测量误差均小于限差值的 1/2，能够满足高铁轨道短波不平顺的测量精度要求。同时

A-INS 轨检小车的短波不平顺测量误差与 3.4.1.1 节的理论分析结果之间具有很好的一致性，进一步验证了 A-INS 轨道测量误差传播模型以及误差定量分析结果的正确性。

同理分析了 A-INS 轨检小车长波不平顺测量值的外符合精度，从图 5-25 和图 5-26 可以看出：A-INS 轨检小车的长波不平顺测量值与参考值之间的差异在轨向上小于 1/3 的限差，高低方向小于 1/10 的限差；完全能够满足高铁轨道长波不平顺的测量精度要求。

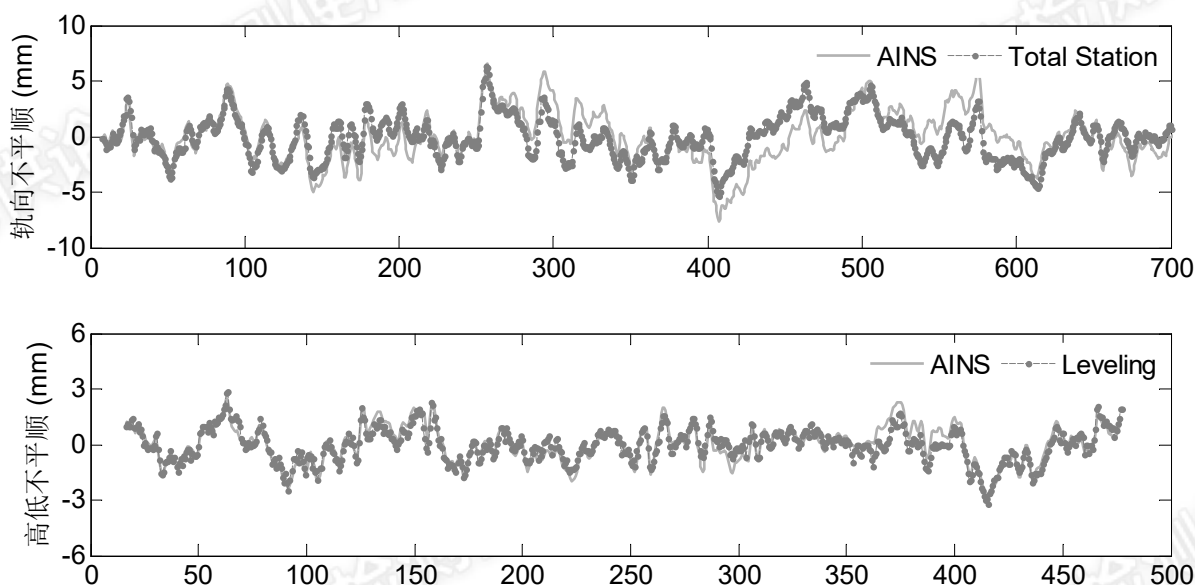


图 5-25 A-INS 轨检小车的实测长波不平顺与参考系统对比

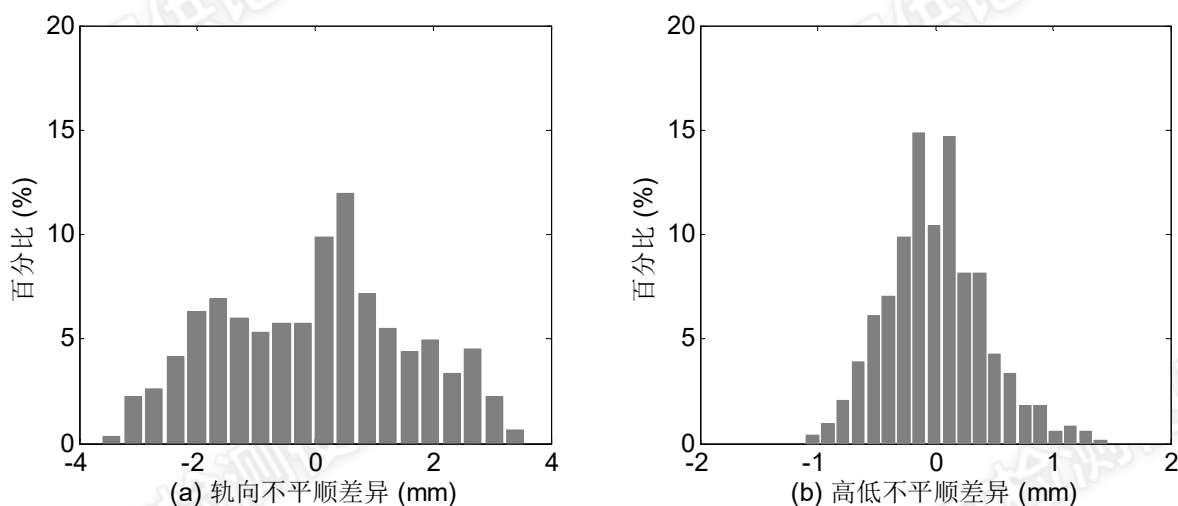


图 5-26 A-INS 轨检小车实测长波不平顺与参考系统实测长波不平顺差异的分布统计；轨向差异的标准差为 1.5 mm ( $1\sigma$ )；高低差异的标准差为 0.42 mm ( $1\sigma$ )

综上，通过 A-INS 轨检小车的轨道偏差量和轨道不平顺测量的外符合精度分析可以看出：A-INS 轨检小车完全能够满足高铁轨道几何状态精密测量的精度要求，其生成的轨道调整量能够用于指导长轨精调。短波不平顺的实测精度与理论分析结果一致，验

证了 A-INS 测量误差传播模型和误差定量分析结果的正确性。

## 5.5 基于实测验证的延伸讨论

### 5.5.1 非完整性约束的影响

3.4.2 节讨论了非完整性约束对于提高轨道不平顺测量精度的影响,下面通过 A-INS 轨检小车的实测结果来进一步论证。仍用 5.4.1 节描述的实验数据,其中 A-INS 松组合解算时只用 GNSS 位置修正,关闭非完整性约束辅助;然后计算相应的轨道横垂偏差量和轨向、高低不平顺。图 5-27 为 A-INS 轨检小车横垂偏差量的测量误差曲线(与参考值求差);可以看出其误差在 1 cm 的幅度上波动,但是误差之间的相关性很强。因此短波不平顺的测量误差要远小于横垂偏差量的误差幅度,如图 5-28 所示。与 5.4.3 的分析结果对比可以看出,不使用非完整性约束辅助时,A-INS 轨道测量误差明显增大,且轨道不平顺测量值已经不满足高铁轨道不平顺测量的精度要求了,系统给出轨道调整量或轨道偏差量测量值也明显失真。

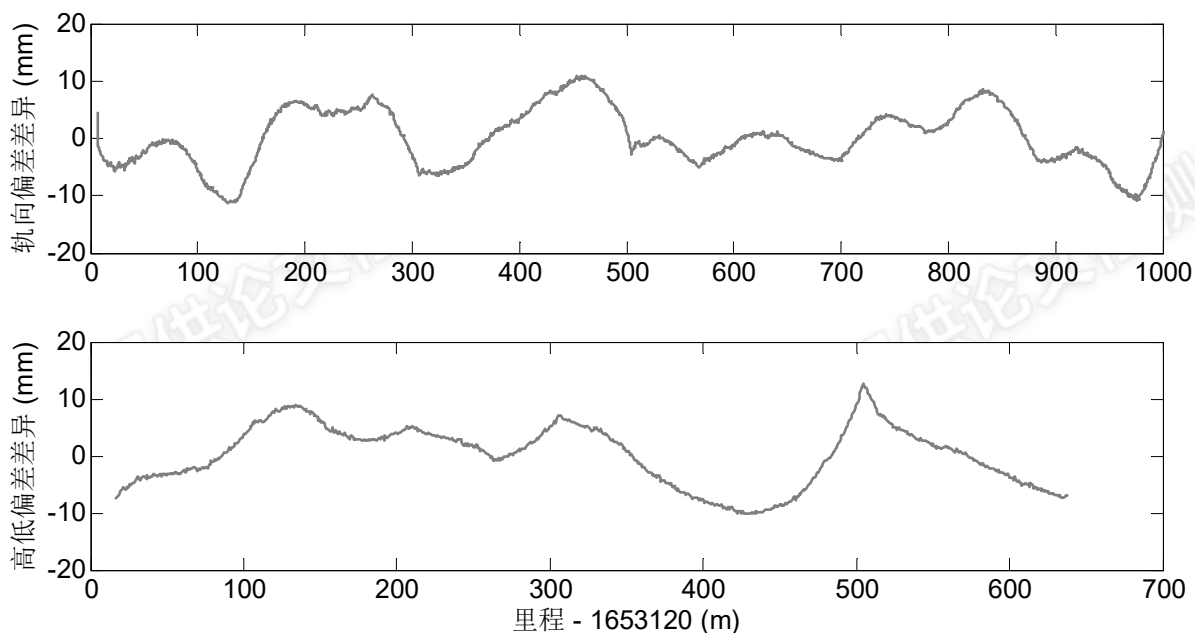


图 5-27 不使用 NHC 辅助时的轨道偏差量测量误差

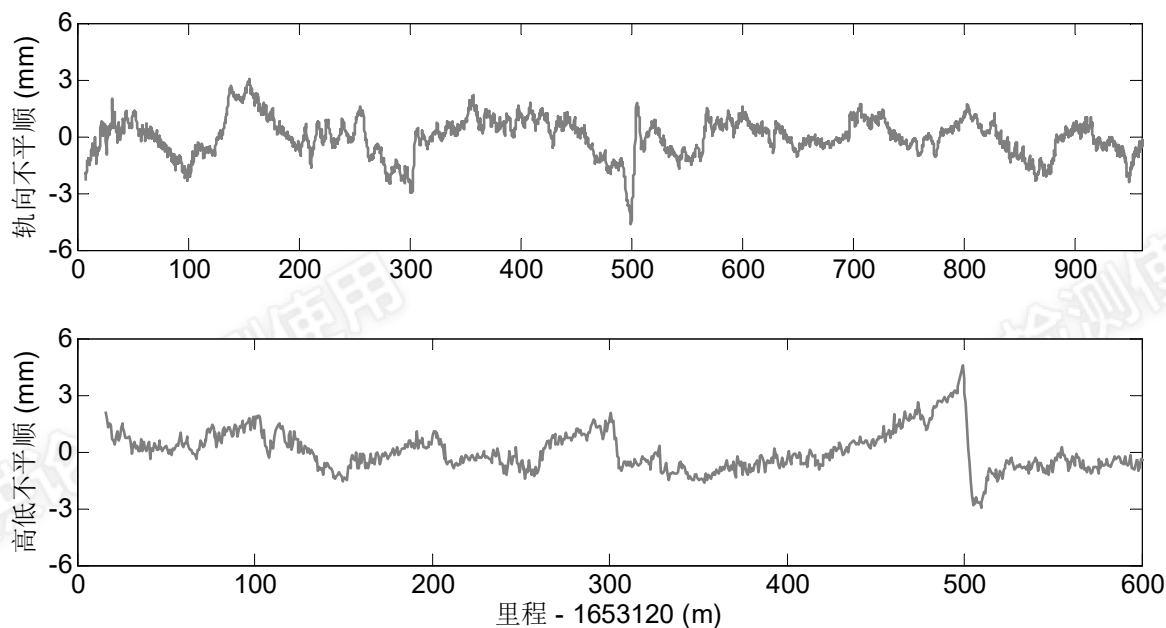


图 5-28 不使用 NHC 辅助时的轨道短波不平顺测量误差

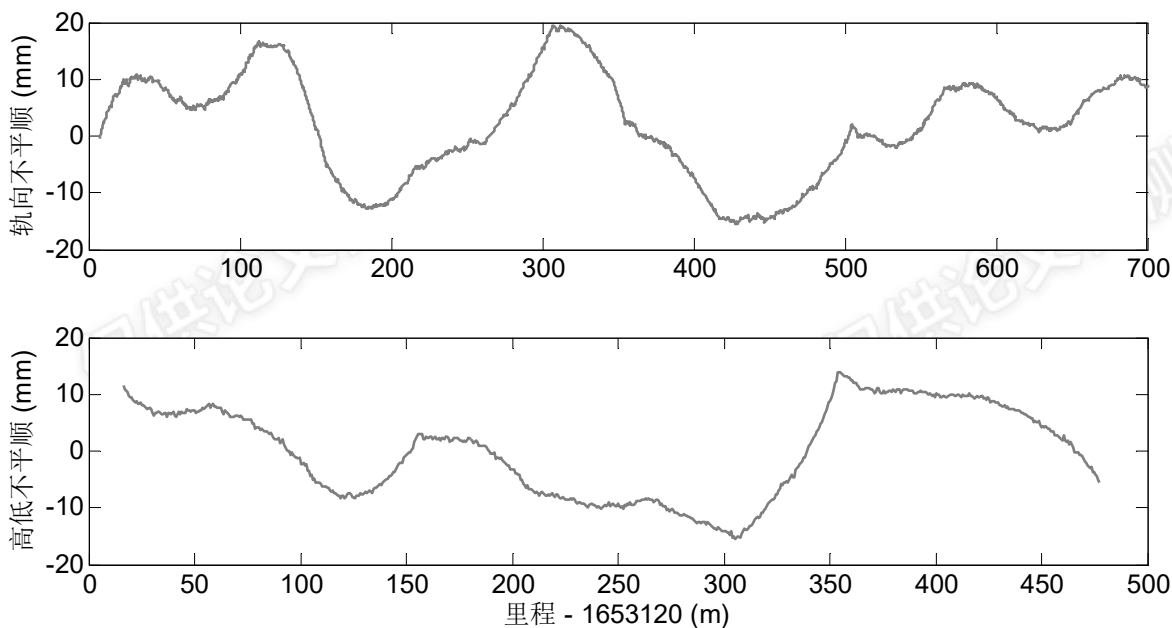


图 5-29 不使用 NHC 辅助时的轨道长波不平顺测量误差

### 5.5.2 曲线轨道测量精度分析

第 3 章的误差理论分析中并未针对运动轨迹为曲线的场景进行详细讨论。下面将通过一组曲线轨道的实测结果来说明 A-INS 轨检小车在曲线段测量的整体性能。该段轨道为兰新高铁新建线路右线 SDK1541+990~SDK1544+066。测段平曲线覆盖了圆曲线、缓和曲线和直线；纵断面上覆盖了直坡和竖曲线，如图 5-30 所示。GNSS 具有良好的观测条件，基站架设在线路附近的 CPII 控制点上；测量过程中对该段轨道进行了三次独立重复测量；但没有得到相应的参考测量值。下面只通过分析 A-INS 轨检小车的轨

道偏差量重复测量误差来说明系统的测量精度，而不对轨道不平顺、轨距偏差和超高偏差进行详细分析。因为轨道不平顺的测量误差完全可由轨道偏差量的误差推导出来，而超高和轨距的测量精度与轨道线型没有关系。

对比图 5-31、图 5-12 和图 5-13 可以看出，曲线段的轨道偏差量重复测量误差与直线段没有明显差异，且误差的幅度相等。说明对于不同的轨道线型，A-INS 轨检小车的测量精度一致，无明显差异。

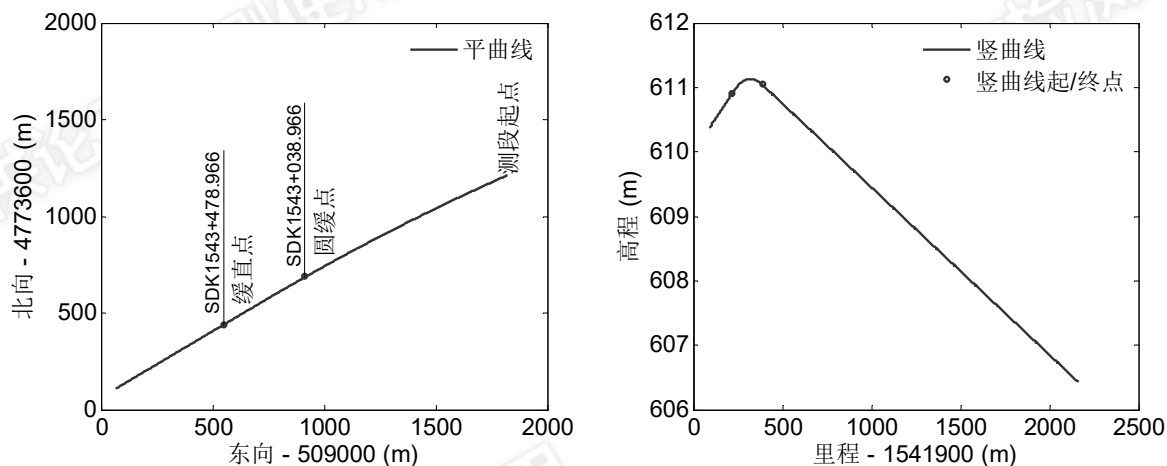


图 5-30 曲线段轨道中线设计线型

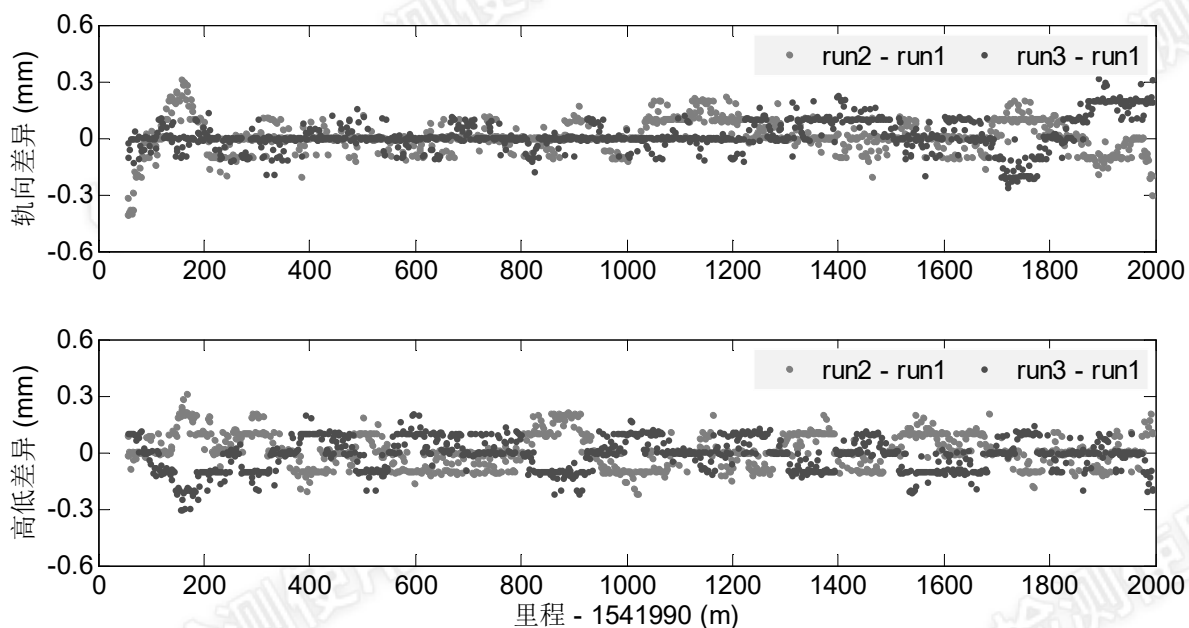


图 5-31 曲线段轨道偏差量多次独立测量之间的差异

### 5.5.3 最优平滑对精度的影响

第 3 章的 A-INS 轨道测量误差传播研究和定量分析都是以正向滤波为对象开展的，并未对 A-INS 组合导航最优平滑的误差传播进行理论分析。下面将通过实测结果来分析在合理和充分使用非完整性约束辅助时，A-INS 组合导航最优平滑的测量精度。对



5.5.2 节中的测量数据（主要考虑 5.5.2 节中的测段比 5.4.1 的长，测量样本点多一些）在 GNSS 位置和非完整性约束辅助下进行组合导航最优平滑解算，并计算对应轨道的偏差量。跟 5.5.2 节的验证思路类似，下面只以轨道偏差量的测量误差为例进行讨论。

图 5-32 为根据 A-INS 轨检小车正向滤波与最优平滑结果计算的轨道横垂偏差量差异曲线。可以看出正向滤波与最优平滑的轨道偏差量测量差异均不大于 0.3 mm，这与 A-INS 轨检小车重复测量误差在同一水平。考虑到轨道偏差量测量精度与轨道不平顺测量精度之间的关系，最优平滑对测量精度的影响可以归纳如下：在合理和充分使用非完整性约束的情况下，基于导航级 A-INS 组合导航系统的轨检小车正向滤波和最优平滑解算的轨道偏差量测量精度无明显差异，最优平滑处理并不能显著提高轨道偏差量和轨道不平顺的测量精度。

这可以做如下解释：理论分析表明在合理和充分使用非完整性约束辅助的情况下，A-INS 组合导航的相对精度主要取决于陀螺或者说取决于姿态精度。最优平滑处理并不能明显提高 A-INS 组合导航系统的姿态精度，因此也不能显著改善轨道不平顺的测量精度。

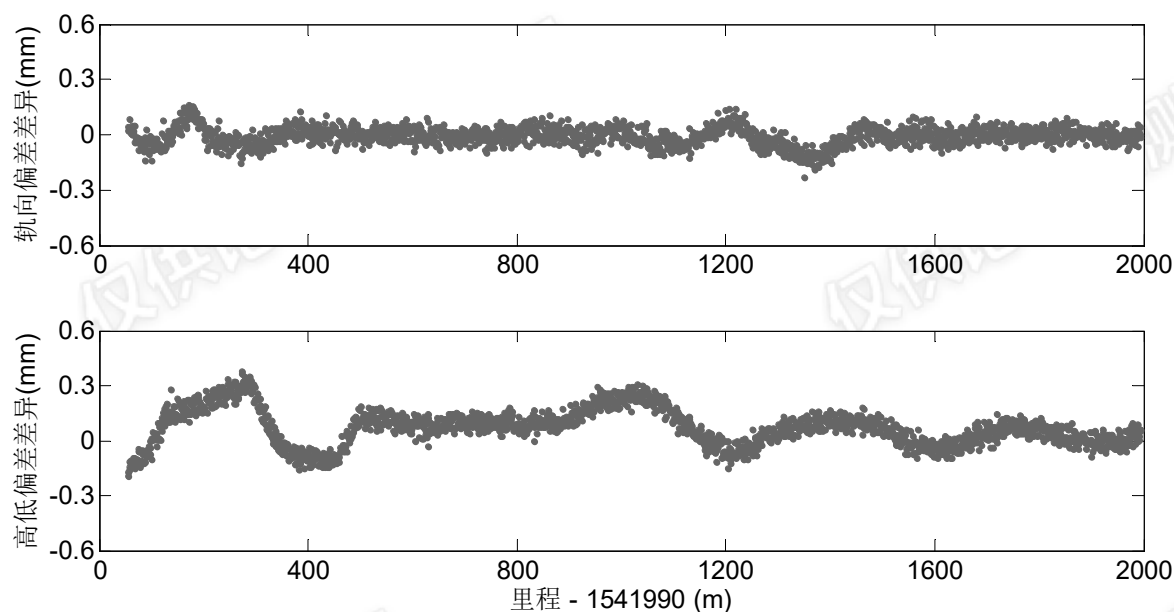


图 5-32 A-INS 轨检小车正向滤波与反向平滑处理得到的轨道偏差量差异

## 5.6 工程应用效果

A-INS 轨检小车原型系统(陈起金 2013)于 2013 年 10 月研制完成，已成功应用于多个实际工程项目中（详见本文附录“攻博期间的科研成果”的项目列表）。中国中铁二局兰新铁路第二双线项目部从 2013 年 12 月 1 日开始到 2014 年 5 月 8 日将 A-INS 轨检小车用于无砟轨道长轨精调测量工程项目。应用之前验证了轨向和高低方向调整量、长短波轨向和高低不平顺、轨距、超高/水平、扭曲、方向和高程递变率、轨距递变率、

超高递变率等各项指标的测量精度，测量结果与水准仪、基于全站仪的常规静态轨检小车（安伯格，GEDO 等）、0 级道尺进行专项对比（本文 5.4.1 节描述的即其中的一个对比验证实验）。对比结果表明 A-INS 轨检小车原型系统的各项参数指标均能满足高铁轨道几何状态测量的精度要求，A-INS 轨检小车的主要性能指标参数如表 5-4 所示。之后，A-INS 轨检小车原型系统被独立用于双线共 208 km 的新建线路长轨精调测量，并取得了很好的精调效果，满足轨道验收的各项精度指标，成功通过了轨道验收。

表 5-4 A-INS 轨检小车主要性能参数

系统精度		作业速度	
轨道横垂偏差量/调整量	±0.5mm	3000 m/h	
超高/水平	±0.2 mm	传感器性能	
轨距	±0.3 mm	采样率	IMU: 200 Hz
里程	±5.0 cm		GNSS: 1 Hz
轨道调整量定位精度	±5.0 cm		轨距: 20 Hz
轨道不平顺		量程	加速度计: ±35 g
波长范围	0~300m		陀螺: ±400 deg/s
短波不平顺精度	±0.5mm/30m	工作温度	-60℃~+80℃
长波不平顺精度	±2mm/300m	电池时长	> 5 h

经过大量的实际工程应用，A-INS 轨检小车的整体性能得到了验证，并在此基础上进行了系统改进和完善。A-INS 轨检小车已完成小批量生产，为铁路轨道几何状态精密测量提供了一个全新的测量方案，如表 5-5 所示；具有测量精度高、速度快、精调效果好等特点。

表 5-5 A-INS 轨检小车与常规静态小车作业模式对比

项目	A-INS 轨检小车	常规静态小车
测量模式	动态测量	静态/准动态
测量速度	3~5 km/h	约 0.3 km/h
对轨道控制点的依赖	极少量 CPII 点	对 CPIII 点的完全依赖
测量环境的影响	几乎不受光线、温度等外界因素的影响	容易受光线、温度、大气等环境因素的影响；在外界环境稳定时才能作业
对测量人员的专业要求	对测量专业技能要求低	要求测量人员具备较高的测量专业技能
外业工作量	小，操作简单	工作量较大，操作复杂
内业数据处理	简单，自动化处理	简单

A-INS 轨检小车能在动态测量模式下实现轨道几何状态的精密测量，速度快，极大

地提高了测量效率。测量效率的提高可以保证在短时间内完成大量的轨道测量任务，大量节省人力成本，进而创造巨大的经济效益。在兰新高铁长轨精调测量项目中，A-INS 轨检小车每天作业 5 小时可完成 10 km 的轨道测量任务，其效率为常规静态小车的 10-15 倍。2013 年 12 月，完成了双线接近 180 公里的精调测量任务。通过对比可以看出，完成同样的测量任务，A-INS 轨检小车所需的时间仅为常规小车的 1/16，所需人员为 1/8，如表 5-6 所示。

表 5-6 A-INS 轨检小车与常规静态小车作业对比

项目	A-INS 轨检小车	常规静态小车
总里程数	双线 180 公里	双线 172 公里
总测量时间	30 天	30 天
外业人员	5 人（加防护人员）	40 人（加防护人员）
所用小车数量	1 台	8 台
每天测量总时长	5 小时	8~10 小时

根据大量实际的轨道精调数据总结：A-INS 轨检小车长轨精调测量效果极佳，基本上 1~2 次精调即可将轨道平面和高程残余调整量降到 5% 以内，而常规静态轨检小车一般需要 2~3 次测量才能实现这一目标。因为 A-INS 轨检小车大量消除了测段搭接误差，整体提高了测量轨迹的平滑性。

## 5.7 本章小结

本章研究和探索了 A-INS 轨检小车原型系统的设计与实现，并基于该原型系统开展了全面而系统的实试验证和性能评估。首先，介绍了 A-INS 轨检小车原型系统的硬件平台设计要点，包括动态测量小车车体的设计思路、传感器功能与设备选型、多传感器数据采集的时间同步方案。其次，详细阐述了 A-INS 轨检小车轨道测量数据处理算法设计和软件的工程化实现，包括多源数据融合的组合导航算法工程化，以及轨道几何参数的计算方法。然后，对 A-INS 轨检小车原型系统的整体性能和测量精度进行了系统而全面的评估，包括内符合精度和外符合精度。接着，基于实测结果对几个重要的研究点进行了延伸讨论，包括实试验证 NHC 对提高相对测量精度的作用、验证 A-INS 轨检小车在曲线轨道上的测量精度和最优平滑对测量精度的贡献。最后，通过实际的工程应用表现了 A-INS 轨检小车的独特优势。

实测结果表明：A-INS 轨检小车能够满足高铁轨道几何状态精密测量的各项精度指标；在轨道不平顺测量方面完全能够达到甚至超过现有常规静态轨检小车的精度。大量的铁路轨道测量实验，尤其是实际工程项目的成功应用表明 A-INS 轨检小车能够满足高铁轨道几何状态测量的各项精度指标，而且测量效率是现有常规轨检小车的 15~20 倍，

实现了铁路轨道几何状态的快速、精密测量；同时极大地降低了对轨道 CPIII 控制点的依赖性；简化了外业数据采集流程和复杂度，降低了对操作人员的测绘技能要求；其测量精度也几乎不受光照、温度等测量环境的影响。

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

## 6 结论与展望

### 6.1 工作总结与创新点

本文研究了基于 A-INS 组合导航的铁路轨道几何状态精密测量技术，突破了相关的核心理论和实践问题。重点研究了针对轨检应用条件的 A-INS 组合导航的测量误差传播模型，该模型考虑了输出误差时间相关性，在此基础上形成了一套基于该模型的误差定量分析方法，为 A-INS 轨道精密测量技术提供了理论支撑；设计并实现了基于 A-INS 组合导航技术的轨检小车原型系统，并对其整体性能进行了系统而全面的测试评估。具体研究成果归纳如下：

1. 建立了针对铁路轨道测量应用的 A-INS 测量误差传播模型。针对铁路轨道测量小车运动的特殊性，对 INS 误差微分方程和观测方程进行简化后得到了通道解耦的状态方程和观测方程。当 A-INS 组合导航连续时间卡尔曼滤波达到稳态时，系统简化成线性时不变系统，其输入为特性已知的观测白噪声和驱动白噪声，输出的 A-INS 组合导航误差序列也是一个平稳随机过程。研究该系统的传递函数得到了各误差源与最终测量误差之间的函数关系，建立了 A-INS 测量误差传播模型。

2. 基于建立的误差传播模型定量分析了高精度 A-INS（陀螺零偏 0.01 deg/h）组合导航系统的轨道几何状态测量误差，研究了各误差源对最终测量精度的定量影响。首先，根据建立的 A-INS 组合导航误差传播模型，配合采用蒙特卡洛仿真得到 A-INS 测量误差的时域响应，即误差的随机过程样本；然后，基于该随机过程样本对高精度 A-INS 系统的轨道几何状态测量误差做了定量分析；最后，研究了主要惯性传感器误差对最终测量精度的影响。研究结果表明：1) 在合理和充分使用非完整性约束（NHC）的前提下，导航级惯导在厘米级的 GNSS 位置修正下完全能够达到高铁轨道不平顺测量所要求的精度指标。2) 非完整性约束（NHC）辅助对于提高 A-INS 的相对测量精度具有重要意义，不使用 NHC 则无法满足高铁轨道不平顺测量的精度要求。3) 在合理和充分使用非完整性约束的情况下，陀螺零偏误差和陀螺白噪声是决定 A-INS 测量精度的关键因素，加速度计零偏误差和白噪声则仅对轨道超高的测量精度有影响。

3. 基于自主开发的数据仿真软件和组合导航数据处理软件验证了本文建立的 A-INS 测量误差传播模型的正确性和有效性。首先，利用 GNSS/INS 松组合数据仿真软件仿真了匀速直线运动场景；然后，用自主研发的多源导航数据处理软件对仿真数据进行处理，得到轨道偏差量和轨道不平顺等参数的测量误差，并与相同条件下 A-INS 测量误差的理论分析结果进行比较。对比结果表明基于误差传播模型的理论分析结果与仿真测试结果的一致性优于 85%，从而验证了所建立的 A-INS 误差传播模型及基于该模型的误差定量分析方法的正确性和有效性。

4. 设计并实现了 A-INS 轨检小车原型系统，作为本文研究工作的实测验证平台。

首先,设计并优化了 A-INS 轨检小车硬件原型系统,实现了对轨道几何状态的动态、精密测量,满足了工程应用需求;其次,自主设计、开发了 A-INS 轨检小车的全套数据处理软件,该软件能够计算轨道精调所需的各项轨道几何参数,其解算精度达到了高铁轨道不平顺测量所提出的精度要求。

5. 基于 A-INS 轨检小车原型系统开展了全面而系统的实测验证工作,评估了高精度 A-INS (导航级,陀螺零偏  $0.01 \text{ deg/h}$ ) 轨检小车的各项精度指标。首先,通过对比多次重复测量结果的一致性评估了 A-INS 轨检小车的内符合精度,结果表明:A-INS 轨检小车的轨道偏差量和长短波轨道不平顺的重复测量误差均不大于  $0.4 \text{ mm}$ ,轨距重复测量误差不大于  $0.3 \text{ mm}$ ,超高重复测量误差不大于  $0.2 \text{ mm}$ 。其次,通过与高精度测量手段的测量结果进行对比,评估了 A-INS 轨检小车的外符合精度,结果表明:A-INS 轨检小车的高低偏差量测量精度优于  $1 \text{ mm}$ ;轨向偏差量测量精度优于  $1.5 \text{ mm}$ ;短波高低不平顺测量精度优于  $0.9 \text{ mm}$ ;短波轨向不平顺的测量精度优于  $1 \text{ mm}$ ;长波不平顺测量误差远小于轨道不平顺管理的容许值(限差)。上述结果综合表明 A-INS 轨检小车能够满足高铁轨道几何状态精密测量的各项精度指标,在轨道不平顺测量方面完全能够达到甚至超过现有常规静态轨检小车的精度。

6. 实现了 A-INS 轨检小车的工程化,并成功应用于多个实际的工程项目。大量的铁路轨道测量实验,尤其是实际工程项目的成功应用表明:A-INS 轨检小车在满足高铁轨道几何状态测量精度要求的前提下,其测量效率是现有常规轨检小车的  $15\sim 20$  倍,实现了铁路轨道几何状态的快速、精密测量;同时 A-INS 轨检小车极大地降低了对轨道 CPIII 控制点的依赖性;简化了外业数据采集流程和复杂度,降低了对操作人员的测绘技能要求;并且其测量精度几乎不受光照、温度等测量环境的影响。

本文的特色和创新点可以凝练成以下三点:

1. 提出了一种基于 A-INS 组合导航技术的高铁轨道几何状态精密测量方法。该方法利用惯性导航(简称惯导)灵敏的运动感知能力,将其搭载在轨检小车上,通过感知轨道不平顺引起的轨检小车运动状态变化来反演轨道的几何形状,从而实现对铁路轨道几何状态参数的动态、精密测量。该方法在本质上充分发挥了惯导出色的相对测量能力,在辅助信息的宏观修正下,在轨道平顺性检测所关心的局部里程区间内达到了亚毫米/毫米级的相对测量精度,满足了高铁轨检的苛刻要求。该方法改变了传统测量方法“走走停停”的作业模式,在保障精度的前提下实现了“边走边测”的动态测量,从而显著提高了测量效率。

2. 针对铁路轨道测量应用场景建立了一套全新的考虑输出误差时间相关性的 A-INS 测量误差传播模型。不同于传统的将导航定位误差当作孤立的随机变量的误差分析方法,本文将 A-INS 组合导航系统的测量误差当作随机过程来研究,在获取误差幅度

信息的同时还获得了其时间相关性；建立了误差源与最终测量误差之间的传递关系，并提供了相应的误差定量分析方法。基于该误差模型和误差分析方法，首次从理论上论证了 A-INS 轨检小车实现高精度轨道不平顺测量的可行性，并分析和评估了不同精度等级的 A-INS 组合导航系统所对应的轨道几何状态测量精度，以及影响测量精度的几个关键因素。为 A-INS 轨检小车的设计和实现提供了全面系统和定量的理论指导。

3. 设计并优化了 A-INS 轨检小车原型系统，通过实际轨道测量实验来全面而系统地评估了其整体性能。首次实现了动态测量模式下的高铁轨道不平顺亚毫米级测量精度；测量效率相比于现有传统手段提高 15-20 倍；该方案对轨道 CPIII 控制网的依赖程度低，不受气温、光照等环境因素影响；操作简单方便，对操作人员没有专业素质方面的要求。A-INS 轨检小车原型系统已在多次轨道测量评估实验和多个实际工程项目中得到了全面而充分的验证。

## 6.2 工作展望

本文实现了第 1 章所提出的目标，将 A-INS 组合导航技术成功应用于轨道几何状态精密测量中，极大地提高了测量效率；并建立了 A-INS 轨道测量误差传播模型及误差定量分析方法，为 A-INS 轨道几何状态精密测量提供了理论指导。后续的研究工作如下：

1. 第 3 章的 A-INS 测量误差建模和误差定量分析带有很强的针对性和局限性，例如只针对直线运动建立了 A-INS 组合导航正向滤波的测量误差传播模型。后续应尝试建立最优平滑的测量误差传播模型，并考虑辅助观测的时间离散化的影响。

2. 尝试将 A-INS 组合导航技术扩展到作业效率更高的高速动态轨检车和车载式轨道几何状态测量设备中。将现有技术应用于高速测量列车上面，需要考虑以下几个问题：1) 高速运动状态下，列车的车轮并不能与钢轨保持连续的密贴，NHC 的成立条件变差，如何保持系统的测量精度？2) 如何设计对应的测量装置，能够在高速运动情况下准确反映轨道的真实几何形状；3) 高速运动状态下，轨道几何参数测量值的精确里程定位问题；4) 高速运动状态下，惯导受到的冲击力变大，系统的稳定性、可靠性和使用寿命如何保证？

3. 基于 A-INS 组合导航技术的铁路轨道几何状态精密测量只是惯性精密工程测量的冰山一角。后续应该进一步打开思路，充分利用和发掘惯导及 A-INS 组合导航的相对测量能力，推动惯性导航技术在精密工程测量中的应用，例如管线测量、定向钻探，并尝试从线状工程应用推广到面状工程（广场，跑道等）。

## 参考文献

- Agnew, D. C. (1992). "The Time-Domain Behavior of Power-Law Noises." *Geophysical Research Letters* 19(4): 333-336.
- Akpınar, B. and E. Güla (2013). "Railway track geometry determination using adaptive Kalman filtering model." *Measurement* 46(1): 639-645.
- Akpınar, B. and E. Güla (2012). "Multisensor railway track geometry surveying system." *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* 61(1): 190-197.
- Alfi, S. and S. Bruni (2008). Estimation of long wavelength track irregularities from on board measurement. *Railway Condition Monitoring, 2008 4th IET International Conference on, IET.*
- Allan, D. W. (1966). "Statistics of atomic frequency standards." *Proceedings of the IEEE* 54(2): 221-230.
- Bagshawe, M. (2013). Investigating inertial measurements using MEMS devices in trainborne automatic track condition monitoring applications. *Control and Automation 2013: Uniting Problems and Solutions, IET Conference on, IET.*
- Barnes, J. A., A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. McGunigal, J. A. Mullen, W. L. Smith, R. L. Sydnor and R. F. Vessot (1971). "Characterization of frequency stability." *IEEE transactions on instrumentation and measurement* 1001(2): 105-120.
- Benson, D. O. (1975). "A comparison of two approaches to pure-inertial and Doppler-inertial error analysis." *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*(4): 447-455.
- Boronahin, A., Y. V. Filatov, D. Y. Larionov, L. Podgornaya and R. Shalymov (2014). Fusion of heterogeneous sensor information for railway track diagnostics. *Sensor Data Fusion: Trends, Solutions, Applications (SDF), 2014, IEEE.*
- Boronahin, A., Y. V. Filatov, D. Y. Larionov, L. Podgornaya and R. Shalymov (2015). Measurement system for railway track condition monitoring. *Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIconRusNW), 2015 IEEE NW Russia, IEEE.*
- Boronahin, A., D. Y. Larionov, L. Podgornaya, R. Shalymov, Y. V. Filatov and E. Bokhman (2016). Specialized navigation system for rail track diagnostics. *2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIconRusNW), IEEE.*
- Boronakhin, A. M., L. N. Podgornaya, E. D. Bokhman, N. S. Filipenya, Y. V. Filatov, R. B. Shalymov and D. Y. Larionov (2011). "MEMS-based inertial system for railway track diagnostics." *Gyroscopy and Navigation* 2(4): 261-268.
- Bortz Sr, J. E. (1970). "A new concept in strapdown inertial navigation."
- Britting, K. R. (2010). *Inertial navigation systems analysis.*
- Brown, R. G. and P. Y. Hwang (1997). *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions.* New York:, Wiley.
- Chen, Q., X. Niu, Q. Zhang and Y. Cheng (2015). "Railway track irregularity measuring by GNSS/INS integration." *Navigation, Journal of the Institute of Navigation* 62(1): 83-93.
- Chen, Q., Q. Zhang and Y. Cheng (2013). Railway track irregularity measuring by GNSS/INS integration. *26th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GNSS 2013, September 16, 2013 - September 20, 2013, Nashville, TN, United states, Institute of Navigation.*
- CN-JJG (2013). 铁路轨道检查仪检定台. JJG 1091-2013.
- CN-TB (2012). 铁路轨道检查仪 [S]. TB/T 3147-2012.
- El-Sheimy, N., H. Hou and X. Niu (2008). "Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance." *IEEE Transactions on instrumentation and measurement* 57(1): 140-149.
- Esveld, C. (2001). *Modern railway track.*



- Fraser, D. and J. Potter (1969). "The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters." *IEEE Transactions on Automatic Control* 14(4): 387-390.
- Gelb, A. (1974). *Applied optimal estimation*, MIT press.
- Gilbert, D. (2006). *Track monitoring equipment*, Google Patents.
- Glaus, R. (2006). *Kinematic track surveying by means of a multi-sensor platform*, Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 16547, 2006.
- Glaus, R. (2006). *The Swiss Trolley-a modular system for track surveying*, Inst. für Geodäsie und Photogrammetrie.
- Grassie, S. L. (1996). "Measurement of railhead longitudinal profiles: a comparison of different techniques." *Wear* 191(1): 245-251.
- Groves, P. D. (2013). *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*, Artech House.
- Hou, H. (2005). *Modeling inertial sensors errors using Allan variance*, Library and Archives Canada=Bibliothèque et Archives Canada.
- Huang, W., W. Zhang, Y. Du, B. Sun, H. Ma and F. Li (2013). "Detection of rail corrugation based on fiber laser accelerometers." *Measurement Science and Technology* 24(9): 094014.
- IEEE (1998). *IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros*. IEEE Std 952-1997.
- IEEE (1998). "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros." IEEE Std 952-1997: i.
- Institution, B. S. (2008). *Railway applications/Track-Track geometry quality-Part1:Characterisation of track geometry*. BS EN 13848-1:2003+A1:2008.
- Kalman, R. E. (1960). "A new approach to linear filtering and prediction problems." *Journal of basic Engineering* 82(1): 35-45.
- Kawasaki, J. and K. Youcef-Toumi (2002). *Estimation of rail irregularities*. American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002, IEEE.
- Lück, T., C. Kreye and B. Eissfeller (2001). *Measurement of Line Characteristics and of Track Irregularities by Means of DGPS and INS*, University of Calgary. International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation, Banff, Alberta, Canada.
- Lück, T., E. Löhnert, B. Eissfeller and P. Meinke (1997). "Track irregularity measurement using an INS-GPS integration technique. 10th Int. Technical Meeting of the Satellite Div. of the US Institute of Navigation.
- Lewis, R. (1984). "Track-recording techniques used on British Rail." *Electric Power Applications, IEE Proceedings B* 131(3): 73-81.
- Li, Y., Q. Chen, X. Niu and C. Shi (2012). *Simulation analysis for the influences of vehicle maneuvers to the attitude estimations of GNSS/INS navigation systems*. China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2012 Proceedings, Springer.
- Liu, C., N. Li, H. Wu and X. Meng (2013). "Detection of high-speed railway subsidence and geometry irregularity using terrestrial laser scanning." *Journal of Surveying Engineering* 140(3).
- Maybeck, P. S. (1982). *Stochastic models, estimation, and control (Volum I)*, Academic press.
- Maybeck, P. S. (1982). *Stochastic models, estimation, and control (Volum II)*, Academic press.
- Meditch, J. S. (1969). *Stochastic optimal linear estimation and control*, McGraw-Hill.
- Miller, R. B. (1983). "A new strapdown attitude algorithm." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 6(4): 287-291.

- Mostafa, M., J. Hutton and B. Reid (2001). GPS/IMU products-the Applanix approach. Photogrammetric Week.
- Moussa, A., A. Ali and N. El-Sheimy (2001). The effect of time synchronization on real time implementation of integrated GPS/INS systems. Proceedings of the 2010 International Technical Meeting of The Institute of Navigation.
- NAGANUMA, Y., M. TANAKA and K. ICHIKAWA (2001). High-Speed Track Inspection Car in New Dr. Yellow, WCRR.
- Niu, X., Q. Chen, J. Kuang and J. Liu (2016). Return of inertial surveying - Trend or illusion? IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, PLANS 2016, April 11, 2016 - April 14, 2016, Savannah, Georgia, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Niu, X., Q. Chen, Q. Zhang, H. Zhang, J. Niu, K. Chen, C. Shi and J. Liu (2014). "Using Allan variance to analyze the error characteristics of GNSS positioning." GPS solutions 18(2): 231-242.
- O'Brien, E. J., C. Bowe and P. Quirke (2015). Determination of Vertical Alignment of Track using Accelerometer Readings. IMechE Stephenson Conference for Railways: Research for Railways, 21-23 April, 2015.
- Oberlechner, G., B. Metzger and J. Zywiell (2000). "GPS System to Boost Accuracy." INTERNATIONAL RAILWAY JOURNAL AND RAPID TRANSIT REVIEW 40(9).
- Rauch, H. E., C. Striebel and F. Tung (1965). "Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems." AIAA journal 3(8): 1445-1450.
- Real, J., P. Salvador, L. Montalbán and M. Bueno (2011). "Determination of rail vertical profile through inertial methods." Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit 225(1): 14-23.
- Riley, W. (2008). Handbook of Frequency, NIST.
- Savage, P. (2000). Strapdown Analytics (Part I), Strapdown Associates Inc, Maple Plain, Minnesota.
- Savage, P. (2000). Strapdown Analytics (Part II), Strapdown Associates Inc, Maple Plain, Minnesota.
- Savage, P. G. (1998). "Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: Attitude algorithms." Journal of guidance, control, and dynamics 21(1): 19-28.
- Shin, E.-H. (2005). Estimation techniques for low-cost inertial navigation, The University of Calgary.
- Skog, I. and P. Handel (2008). Effects of time synchronization errors in GNSS-aided INS. 2008 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, IEEE.
- Sunaga, Y., I. Sano and T. IDE (1997). "A method to control the short wave track irregularities utilizing axlebox acceleration." Railway Technical Research Institute, Quarterly Reports 38(4).
- TB/T (2014). 高速铁路设计规范. 10621-2014.
- Technologies, A. "<http://www.ambergtechnologies.ch/en/news-events/news-detail/article/amberg-ims-1000-and-amberg-ims-3000-systems/>."
- Titterton, D. and J. L. Weston (2004). Strapdown inertial navigation technology, IET.
- Trimble. from <http://www.trimble.com/rail/trolley.aspx?dtID=overview&>.
- Tsunashima, H., A. Matsumoto, H. Mori, T. Mizuma and Y. Naganuma (2012). Condition monitoring of railway track using in-service vehicle, INTECH Open Access Publisher.
- Tsunashima, H., Y. Naganuma and T. Kobayashi (2014). "Track geometry estimation from car-body vibration." Vehicle System Dynamics 52(sup1): 207-219.
- Tsunashima, H., Y. Naganuma, A. Matsumoto, T. Mizuma and H. Mori (2011). Japanese railway condition monitoring of tracks using in-service vehicle. Railway Condition Monitoring and Non-Destructive Testing (RCM 2011), 5th IET Conference on, IET.

van der Merwe, G. and P. Venter (2001). "IM2000 Infrastructure Measuring Car: the application of recording results." *Rail Engineering International* 30(4).

Wang, Y., Y. Qin and X. Wei (2012). Track irregularities estimation based on acceleration measurements. *Measurement, Information and Control (MIC), 2012 International Conference on, IEEE*.

Welch, P. (1967). "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms." *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 15(2): 70-73.

Wenty, R. (2007). "Plasser & Theurer machines and technologies applied for track maintenance of high-speed railway lines: a selection." *Rail Engineering International* 36(1).

Weston, P., C. Ling, C. Roberts, C. Goodman, P. Li and R. Goodall (2007). "Monitoring vertical track irregularity from in-service railway vehicles." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 221(1): 75-88.

Weston, P., C. Ling, C. Goodman, C. Roberts, P. Li and R. Goodall (2007). "Monitoring lateral track irregularity from in-service railway vehicles." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 221(1): 89-100.

Wildi, T. and R. Glaus (2002). A multisensor platform for kinematic track surveying. 2nd Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, Citeseer.

YAZAWA, E. and K. TAKESHITA (2002). "Development of measurement device of track irregularity using inertial mid-chord offset method." *Quarterly Report of RTRI* 43(3): 125-130.

Zhang, Q., X. Niu, Q. Chen, H. Zhang and C. Shi (2013). "Using Allan variance to evaluate the relative accuracy on different time scales of GNSS/INS systems." *Measurement science and technology* 24(8): 085006.

Zywiell, J. and G. Oberlechner (2001). "Innovative measuring system unveiled." *International Railway Journal* 41(9).

白洪林, 张发成 and 张文辉 (2015). 轨道几何状态快速测量仪. 中国.

班亚龙 (2016). 高动态 GNSS/INS 标量深组合跟踪技术研究. 博士, 武汉大学.

曾若飞, 张金龙, 袁玫 and 马文静 (2013). 铁路精密测量装置. CN 202786995 U.

陈海军 (2013). 既有线有砟轨道优化线形算法研究及其软件研制. 硕士, 西南交通大学.

陈起金 (2013). GNSS/INS 组合导航在高铁轨道不平顺检测中的应用. 硕士, 武汉大学.

陈强, 刘丽瑶, 刘成龙, 余毅, 杨莹辉, 郭良浩 and 王鹏 (2014). 一种铁路轨道平顺性检测的车载近景摄影测量方法.

陈文 (2015). 高速铁路轨道静态检测数据处理方法研究. 硕士 硕士, 西南交通大学.

陈心一, 唐杰, 周敬勇, 杜鹃 and 姚云峰 (2009). 轨道几何状态测量仪. 中国.

丁喜成 and 张体强 (2010). 无砟轨道几何状态检测系统. CN 201546149 U.

丁喜成 and 张体强 (2010). 用于无砟轨道的几何状态测量车. CN 201546149.

冯光东, 郭良浩, 刘志友, 孙基平, 徐雪花 and 郭宝安 (2013). 铁路轨道几何形态检测方法. CN 103205920 A.

冯光东, 郭良浩, 刘志友, 孙基平, 徐雪花 and 郭宝安 (2013). 铁路轨道几何形态检测仪. CN 203284704 U.

傅勤毅 (2011). 基于多源信息融合的轨道几何状态测量系统和方法. CN 102251451 A.

傅勤毅, 何发明, 樊尚君, 楚建军, 李绍云, 文旭, 周晓东 and 陈茂松 (2012). 用于轨道参数约束测

量的检测方法 & 轨道检查仪. CN 102390405 A.

傅勤毅, 何发明, 李绍云, 樊尚君 and 彭春秀 (2007). 新型轨道检查仪. CN 200971459Y.

关肇直, 王恩平 and 崔毅 (1984). 线性控制系统理论在惯性导航系统中的应用. 北京, 科学出版社.

郭榕刚 (2015). 一种轨道检测小车. CN 204644814 U.

韩峰 (2015). 基于点云信息的既有铁路状态检测与评估技术研究. 博士 博士, 西南交通大学.

韩云飞 (2012). 一种 GPS 轨道不平顺检测系统及其检测方法. CN 102337710 A.

韩云飞 (2013). 一种卫星导航与惯性测量组合轨道测量系统与方法. CN 103207403 A.

郝瀛 (2008). 铁道工程. 北京, 中国铁道出版社.

江西日月明测控科技股份有限公司. <http://www.rym.com.cn/product.asp?db=pro&id=99>.

江西日月明测控科技股份有限公司. "<http://www.rym.com.cn/product.asp?db=pro&id=102>."

科技基[2008]86 号 (2008). 客运专线轨道几何状态测量仪暂行技术条件.

孔祥元, 郭际明 and 刘宗泉 (2005). 大地测量学基础. 武汉, 武汉大学出版社.

旷俭 (2016). TS/INS 组合导航在高铁轨道不平顺检测中的应用. 硕士, 武汉大学.

李德光 (2012). 铁路线路中线空间坐标与里程换算模型的研究 硕士, 西南交通大学.

罗林, 张格明, 吴旺青 and 柴雪松 (2006). 轮轨系统轨道平顺状态的控制. 北京, 中国铁道出版社.

牛小骥, 陈起金, 张全, 章红平 and 刘经南 一种基于 INS/GNSS 的轨道不平顺检测系统及方法.

牛小骥, 章红平, 陈起金, 郭忠平 and 旷俭 基于 INS 与全站仪组合的轨道几何状态测量系统及方法.

秦永元 (2014). 惯性导航, 科学出版社.

秦永元, 张洪钺 and 汪叔华 (2015). 卡尔曼滤波与组合导航原理 (第 3 版), 西北工业大学出版社.

王国祥, 卢建康, 王国昌, 郑子天, 曹体涛, 李毛毛 and 梅熙 (2013). 铁路轨道几何状态测量轨检小车. CN 103231718 A.

王平, 王源, 肖杰灵, 徐金辉, 陈嵘, 韦凯, 赵才友, 王彪 and 王健 (2015). 轨道平顺状态的检测方法 & 装置. CN 105083320 A.

王争鸣, 任晓春 and 罗文彬 (2015). 一种用于高速铁路精密测量的全站仪测量小车. CN 204509910 U.

王争鸣, 任晓春 and 罗文彬 (2015). 用于高速铁路精密测量的全站仪测量小车. CN 104674622 A.

魏晖 (2014). 高速铁路轨道平顺性静态检测理论与精调技术研究 博士, 南昌大学.

魏世斌, 李颖, 赵延峰 and 陈春雷 (2012). "GJ-6 型轨道检测系统的设计 & 研制." 铁道建筑(02): 97-100.

吴文启, 杨伟光 and 杨杰 (2009). "激光陀螺捷联惯导系统尺寸效应参数标定 & 优化补偿." 中国惯性技术学报(06): 636-642.

武元新 (2005). 对偶四元数导航算法 & 非线性高斯滤波研究 博士, 国防科学技术大学.

严恭敏, 严卫生 and 徐德民 (2008). "捷联惯性测量组件中内杆臂效应分析与补偿." 中国惯性技术学报(02): 148-153.

应立军, 吴湘华, 彭. 彪, 彭仪普, 陈. 峰, 江四平, 潘. 亮 and 曹宏宇 (2008). 高速铁路轨道精测

仪. CN 201158385Y.

应立军, 吴湘华, 彭. 彪, 周书武, 贾文强, 黄. 浩 and 彭建国 (2005). 轨道静态几何参数检测小车. CN 2778867Y.

应立军, 周书武, 吴湘华 and 彭彪 (2005). 轨道静态几何参数检测仪. CN 2701720Y.

袁信 and 郑谔 (1985). 捷联惯性导航系统原理, 北京: 航空工业出版社.

张继科 (2014). 便携式轨道几何检测系统研究 硕士, 北京交通大学.

张金龙 (2011). 客运专线轨道几何状态测量仪. CN 201843030 U.

张全 (2015). GNSS/INS 组合导航短期精度的分析方法和应用研究. 博士, 武汉大学.

张提升 (2013). GNSS/INS 标量深组合跟踪技术研究 with 原型系统验证. 博士, 武汉大学.

张晓江, 张翔, 杨世峰, 朱明宏, 成思源 and 杨雪荣 (2014). 铁路轨道几何状态检测小车. 中国.

郑小飞 (2010). 轨道几何状态激光测量仪. CN 201525994 U.

仲崇成, 李恒奎, 李鹏, 曹源 and 张玉琢 (2013). "高速综合检测列车综述." 中国铁路(06): 89-93.

朱华 (1990). 随机信号分析, 北京理工大学出版社.

左玉良 (2007). 轨道几何状态检测技术的应用研究 硕士, 同济大学.

## 攻博期间的科研成果

### 1. 发表的论文

- [1] **Chen, Q.**, X. Niu, Q. Zhang and Y. Cheng (2015). "Railway track irregularity measuring by GNSS/INS integration." *Navigation, Journal of the Institute of Navigation* 62(1): 83-93. (SCI)
- [2] Niu, X., **Q. Chen**, Q. Zhang, H. Zhang, J. Niu, K. Chen, C. Shi and J. Liu (2014). "Using Allan variance to analyze the error characteristics of GNSS positioning." *GPS Solutions* 18(2): 231-242. (SCI)
- [3] **Chen, Q.**, Q. Zhang and Y. Cheng (2013). Railway track irregularity measuring by GNSS/INS integration. *26th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GNSS 2013*, September 16, 2013 - September 20, 2013, Nashville, TN, United states, Institute of Navigation. (**ION GNSS Student Paper Award, 2013**)
- [4] Zhang, Q., X. Niu, **Q. Chen**, H. Zhang and C. Shi (2013). "Using Allan variance to evaluate the relative accuracy on different time scales of GNSS/INS systems." *Measurement Science and Technology* 24(8). (SCI)
- [5] Niu, X., **Q. Chen**, J. Kuang and J. Liu (2016). Return of inertial surveying - Trend or illusion? *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, PLANS 2016*, April 11, 2016 - April 14, 2016, Savannah, Georgia, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- [6] Li Y, **Chen Q**, Niu X, et al. *Simulation analysis for the influences of vehicle maneuvers to the attitude estimations of GNSS/INS navigation systems*[C]//China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2012 Proceedings. Springer Berlin Heidelberg, 2012: 679-694.

### 2. 授权的发明专利

- [1] 牛小骥, 陈起金, 张全, 章红平, 刘经南. 一种基于 INS/GNSS 的轨道不平顺检测系统及方法[P]. 中国: ZL 2013 1 0312460.3.授权日: 2015-01-14
- [2] 牛小骥, 章红平, 陈起金, 郭忠平, 旷俭. 基于 INS 与全站仪组合的轨道几何状态测量系统及方法[P]. 中国: ZL 2014 1 0089658.4.授权日: 2015-01-28

### 3. 参与的科研项目

- [1] 2012-2014, 863 计划项目, “导航与位置系统关键技术及应用示范(一期)” 之子课题“导航与位置通用接收机关键技术及应用”(项目编号: 2012AA12A206), 项目参与者, 负责 GNSS/INS 组合导航算法设计。
- [2] 2012-2013, 国防科工局其它项目, “XX 卫星工程初始运行阶段区域卫星定位授时性能评估”(项目编号: 2012010047129), 项目参与者, 负责测试及数据处理。
- [3] 2015.10 至今, 横向项目: 武汉市现代有轨电车试验线新建线路轨道几何状态检测 (95 公里), 主要负责人。
- [4] 2016 至今, 国家自然科学基金面上项目, 带有辅助信息的惯性导航 (A-INS) 用于精密工程测量的理论与方法研究 (41674038)。主要参与者, 负责 A-INS 误差传播建模及 A-INS 轨检小车研发。

### 4. 获得的奖励

- [1] 2013 年 9 月, “Railway track irregularity measuring by GNSS/INS integration” 一文获美国国际导

航学会 (ION) 第 26 届卫星导航会议“学生论文奖 (ION GNSS Student Paper Award)”。ION GNSS 会议是国际上级别最高的导航技术会议 (当年轻 6 篇文章获奖)。

[2] 2014 年 9 月, 武汉大学“杨奇奖学金”

[3] 2015 年 9 月, 博士研究生国家奖学金

#### 5. 负责的铁路轨道测量横向项目

[1] 2013.12~2014.5, 兰新铁路第二双线新建线路长轨精调测量 (208 公里), 技术负责人

[2] 2015.10, 广深港高铁 (梅林关隧道段) 轨道验收测量, 技术负责人

[3] 2016.3 至今, 铁四院既有线三维绝对坐标快速测量技术研究, 技术负责人

## 致 谢

衷心感谢我的导师牛小骥教授。在五年半的研究生生活中，牛老师不厌其烦地指引和督促我一步步前进，投入了大量的心血和精力；我所做的每一项工作，所发表的每一篇文章都浸润着牛老师辛勤的汗水。牛老师给了我充分的自由去做新的探索和尝试，遇到难题时，又总能从牛老师那里得到最直接的帮助或深刻的启发。牛老师渊博的知识、敏锐的洞察力、严谨的科研态度和忘我的工作作风都让我深感佩服，值得我终身学习。能在自己的黄金年龄段遇到这么一位好导师实在是我的幸运，再多的溢美之词也难以表达我对牛老师的敬意与感激。

衷心感谢刘经南院士。刘院士在百忙之中还挤出时间询问我的研究工作和论文写作情况，鼓励我向更高的目标看齐。刘院士积极地将我的研究成果推向实际应用，极大地增强了我对自己研究工作的信心。如果没有刘院士的指导和帮助，本论文的进展也不会这么顺利，研究成果的转化也会更加曲折和缓慢。

衷心感谢章红平教授。章老师在学业上给予我指导，在生活中也给予我极大的帮助。章老师强有力地推动了 A-INS 轨检小车的产品化和 InsRail 软件的完善和推广。虽然研究成果转化的道路曲折而漫长，但是章老师从来没有对我丧失信心，并与我们一起坚持到底，精益求精。

特别感谢上海交通大学武元新教授和上海宇航系统工程研究所的顾冬晴博士多次与我讨论 A-INS 误差建模方面的问题，并给出了很多新颖的思路和具体的建议。感谢美国俄亥俄州立大学的 Christopher Jekeli 教授、美国 Stardown Associates Inc. 的 Paul G. Savage、清华大学的高钟毓教授的邮件交流，他们指出了建模工作的复杂性，在建模方法方面的诸多建议让我很受启发。

由衷感谢张晓江总经理的伯乐之恩。正是张总与牛老师的一次偶遇让我与高铁结缘，走上了这样一条研究之路。不论是在顺境还是逆境，张总给我的帮助总是那么直接，那么到位。在此祝张总的事业兴旺发达。

感谢武汉大学 GNSS 中心姜卫平教授、施闯教授、赵齐乐教授、叶世榕教授、刘晖教授、聂桂根教授、朱敦尧教授、李陶教授、唐卫明教授、楼益栋教授、耿江辉教授、江鹏研究员、李敏副教授、邹璇副教授、方荣新副教授、耿涛副教授，贺喜、唐健、涂冰英、郭迟、宋伟伟、高柯夫、胡志刚、辜声峰老师以及高振东、杨敏、戚颖华、付波、张爱武、金红、何小丹、王群、刘崇祥等诸位老师多年来对我的关心、帮助和支持。

感谢 GNSS/INS 组合导航团队对我博士工作的支持和帮助。感谢郭文飞和张提升老师在随机信号处理和组合导航误差建模方面提供了很多宝贵的经验，让我能够从不同的专业视角来审视自己的研究工作。感谢师兄张全博士在组合导航算法和程序实现方面给了我细致和耐心的指导；生活上全哥也是我们的兄长，对我极为关照并与我分享了很多



作为过来人的宝贵经验。感谢师兄班亚龙博士在组合导航误差建模方面给予我的细致指导，与我分享了他博士研究工作中的宝贵经验，班师兄严谨细致的科研态度及工匠般的精神让我极为钦佩，值得我一直学习和效仿。感谢师兄李由博士提供的 GNSS/INS 组合数据仿真程序，师兄在科研上积极探索的精神一直激励着我。特别感谢师弟旷俭，在研发初期师弟一直与我奋战在研发和实测的一线，任劳任怨；A-INS 轨检小车也凝聚了旷俭大量的心血和精力，对此我充满感激。感谢程亚豪博士在轨道几何不平顺测量研究初期所做的大量可行性论证分析，让我少走了很多弯路。感谢博士生李团在 GNSS 精密数据处理方面提供的支持和帮助。感谢师兄刘川川、师姐韩文慧、许靖、张娣、闵翔，龚琳琳、高琳、王青江、杨鑫、张辉、李青丽、郭忠平、张鹏辉等曾为团队建设付出努力并已走上工作岗位的你们，祝你们工作顺利，生活幸福；感谢仍致力于组合导航团队建设的高周正、吕海霞、黄玲、李冰、束远明、常乐、王强、蔡磊、余彤、王倩、徐正鹏、金荣河、祁发瑞、李卓、程政、黄凤寒、刘衡嵘、李姗姗和周禹昆等。能够在学术氛围浓厚，团结互助、充满活力 GNSS/INS 导航团队学习与生活是我的荣幸，祝团队不断发展，勇攀高峰！

感谢武汉迈普时空在 A-INS 轨检小车系统产品化中所做的工作。特别感谢软件工程师易凯在商业版 InsRail 软件设计方面所做的大量工作，其超强的编程能力让我深感佩服。感谢曾令侃、柴寅、程磊、程世来、章贵秋、陈强等同事在小车测试和工程应用方面提供的帮助和支持。

感谢铁科院的刘秀波博士和铁四院彭先宝工程师长期以来与我进行技术探讨，与你们的交流讨论开阔了我的视野，也加深了我对铁路系统的认识，让我受益匪浅。

A-INS 轨检小车的研发和产品化道路曲折而又漫长，特别感谢曾经与我一起奋战在一线的兄弟们。特别感谢深圳大铁的刘毅，我们与轨检小车一起成长，在长期合作中也结下了深厚的友谊。感谢张翔工程师，与您的交流加深了我对铁路轨检的认识，翔哥淡泊而内心平静，这也是我一直追求的人生境界。感谢 A-INS 轨检小车兰新高铁外业测量队的队员：王明杰，胡钧洋，戴源远，杨世超。在新疆的半年多时间虽然辛苦，我却永远铭记于心，值得回味。

感谢中铁二局陈顺利经理和李忠国队长，陈经理慧眼识珠使得 A-INS 轨检小车在兰新高铁中得到了充分的验证和工程应用。感谢深圳大铁周浩总经理、马传松工程师、杨富炜工程师给我的支持。感谢对我曾经帮助过我的梁世川、苏瑞明和李少辉。

最后，感谢我的父母、爷爷奶奶、姐姐、姐夫和小外甥，家人永远是最坚强的后盾，也是我前进的动力，惟愿能有更多时间陪伴你们左右。特别感谢我的妻子谢小婷女士，有你我倍感幸福。

谨以此文献给我的家人！